

2014.09.06

## النهايات (les limites)

التمرين ١

احسب النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 7x - 2) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 1) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 - 2) \quad (3)$$

ملاحظة :

نهاية كثير حدود طابعه يؤثر على  
 $+\infty$  أو  $-\infty$  هي نهاية الحد  
 الذي له أعلى درجة.

$$(1) \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 7x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4) = -\infty$$

$$(2) \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$(3) \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^2) = -\infty$$

التمرين ٢

احسب النهايات الآتية :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2|x|^3 - 5x + x^3 + 2) \quad (1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (x^3 - |x^3| + x^2 - |x|) \quad (2)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (|x| - 1 + x^2) \quad (3)$$

ملاحظة ١

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2|x|^3 - 5x + x^3 + 2) =$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x < 0$$

$$|x| = -x$$

لأن

فإن  
أي

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2(-x)^3 - 5x + x^3 + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 - 5x + 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3)$$

$$= +\infty$$

(١) لدينا



(3) لدينا

1

(1+x)

(10) لدينا

(11)

ملاحظة

$x \rightarrow +a$	$ x  \rightarrow \infty$ : تعني	(1)
$x \rightarrow -a$		
$x \rightarrow -\infty$	$-x \rightarrow \infty$ "عكس"	(2)

ملاحظة

إشارة $x^k$ من إشارة $x$		إشارة $x^{2k+1}$ من إشارة $x$	
$k \in \mathbb{N}$	من إشارة $x$	0	$+\infty$
$x \rightarrow -\infty$		0	$+\infty$
$x$	-	0	+
$x$	-	0	+
$x$	-	0	+
$x^3$	-	0	+

(2) توجد حالتان  
 $x \rightarrow -\infty$   
 $x \rightarrow +\infty$

(1) لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - |x^3| + x^2 - |x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^3 + x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x)$

المترين (3)

فإن  $x < 0$

أي  $|x| = -x$

(1)  $|x^3| = -x^3$

(2) لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - |x^3| + x^2 - |x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^3 + x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$

(3) فإن  $x > 0$

أي  $|x| = x$

(4)  $|x^3| = x^3$

(1)  $|x^3| = x^3$

ملاحظة  $x^2 \geq 0$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

(1)  $x^{2k} \geq 0$  من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

$k \in \mathbb{N}$	من إشارة $x$	0	$+\infty$
$x \rightarrow -\infty$		0	$+\infty$
$x$	-	0	+
$x$	-	0	+
$x^2$	+	0	+

$|x^2| = x^2$

(2) لدينا



(3) لدينا (15) أي توجد حالتان

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -(x-1) & ; x \leq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x-1| + x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1+x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|x-1| + x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1+x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (|x-1| + x^2) = +\infty \quad \text{لدينا (16)}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^2 = +\infty \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x-1| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1| = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1| = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$$

مثلا > 2

$$\lim_{x \geq 2} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \leq 2} \frac{1}{x} = -\infty$$

التحريبي (3) احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x \geq 2} \frac{1}{x-2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \leq 2} \frac{1}{x-2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \leq 3} \frac{1}{3-x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \geq 3} \frac{1}{3-x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \geq 2} (x-2) = 0^+ \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \geq 2} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad (1)$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x-2$	$-$	$0$	$+$

$$\lim_{x \leq 2} (x-2) = 0^- \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \leq 2} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad (2)$$

لدينا



(3)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x) = 0^+$  لأن  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty$  لدينا (3)

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$3-x$	$+$	$0$	$-$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{3-x} = -\infty$  لدينا (4)

$\lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x) = 0^-$  لأن

التعريف (4)

احسب النهايات الآتية:

مثال 1

$a \neq 0$  حيث  $ax^2 + bx + c = 0$

إذا كان  $\Delta \geq 0$  فإن المعادلة

تقبل حلين  $x_1$  و  $x_2$  حيث

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

(1)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3}$

(1) لدينا  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 3) = 6$  لأن

$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 4x + 3) = 0^-$

$x$	$-\infty$	$1$	$3$	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$0$	$-$	$+$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$3 + x_2 = -\frac{-4}{1}$

$3 \times x_2 = \frac{3}{1}$

$x_2 = 4 - 3$

$x_2 = 1$

$x_2 = 1$

(2) لدينا  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 4x + 3} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 3) = 6$  لأن

$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 4x + 3) = 0^+$



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4x+4} = +\infty$$

لـ 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \quad \text{جـ 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4x+4) = 0^+$$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$x^2-4x+4$		$0$	

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2 \times x_2 = \frac{4}{1}$$

$$x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2-4x+4} = +\infty \quad \text{لـ 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \quad \text{جـ 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4x+4) = 0^+$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$a$ نفس	$0$ عكس	$a$ نفس

$ax^2+bx+c$	لـ 3
$a \neq 0$	حـ 3

$$\Delta < 0 \quad \leftarrow \quad \text{لا يوجد جذور}$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$	$a$ نفس	$a$ نفس

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \quad \leftarrow \quad \Delta = 0 \quad \text{حـ 3}$$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$	$a$ نفس	$0$ عكس	$a$ نفس



← حد لـ  $P(x)$  عند  $x = \alpha$  حيث  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$+\infty$
$a x^2 + b x + c$		نقطة	نقطة	نقطة
		إشارة $a$	إشارة $a$	إشارة $a$

التحليل (5)

احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 4x + 3} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^4 - 4x + 3} \quad (3)$$

(1) لدينا

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 4) = 0$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + x^2 + 4) = 0$$

النهاية المصيدة ج.ع.ت هي الشكل  $\frac{0}{0}$

الاحتمالات عدم التحسين هي:

$$a^0 = 1$$

حيث  $a \neq 0$

$$1^n = 1$$

حيث  $n \in \mathbb{Z}$

$0 \times \infty$	(4)	$\infty - \infty$	(1)
$1^\infty$	(5)	$\frac{\infty}{\infty}$	(2)
$0^0$	(6)	$\frac{0}{0}$	(3)

$P(x)$  كثير حدود

$\alpha$  عدد حقيقي

$P(x)$  حد لـ  $\alpha$

$$P(\alpha) = 0$$

$P(x)$  يقبل القسمة على  $(x - \alpha)$

يوجد كثير حدود  $Q(x)$

$$P(x) = (x - \alpha) \times Q(x) \quad \text{حيث}$$



لازالة ح.ع. تظل البسط والمقام

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 \quad \text{لدينا}$$

$$= (x-2)(x+2)$$

$$x^3 + x^2 + 4 = (x+2)(x^2 - x + 2) \quad \text{لدينا}$$

طريقة هورنر

	1	1	0	4	مخاطبات P(x)
-2 x	↓	-2	2	-4	
	1	-1	2	0	مخاطبات Q(x)

$$Q(x) = x^2 - x + 2 \quad \text{اي}$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 2)}$$

$$= \frac{x-2}{x^2 - x + 2}$$

اذن

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2 - x + 2} \quad \text{وحده}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \quad c \neq 0 \quad \text{مع}$$

$$= \frac{-4}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

(2) حساب

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{2x+3} - 3) = 0 \quad \text{بأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 3) = 0$$

اذن لدينا ح.ع. ت. من الشكل  $\frac{0}{0}$

لازالة ح.ع. ت. نكتب:

- \* مرافق  $\sqrt{A} - \sqrt{B}$  هو:  $\sqrt{A} + \sqrt{B}$
- \* مرافق  $\sqrt{A} + B$  هو:  $\sqrt{A} - B$
- \* مرافق  $\sqrt{A}$  هو:  $\sqrt{A}$
- \* مرافق  $(\sqrt{A} + B) - C$  هو:  $(\sqrt{A} + B) + C$
- \* مرافق  $\sqrt{A} + (B - C)$  هو:  $\sqrt{A} - (B - C)$
- \* مرافق  $\sqrt{A} - (B - C)$  هو:  $\sqrt{A} + (B - C)$

بعد ضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(\sqrt{2x+3} - 3)(\sqrt{2x+3} + 3)}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{2x+3} + 3)}$$

$$(x - a)$$

$$P(x) =$$



(2b)

$a \neq 0$   $\Rightarrow$   $ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow$   $a + b + c = 0$   $\Rightarrow$   $x = 1$  (جواب)

$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$\Rightarrow$   $b = -a - c$   $\Rightarrow$   $x = -1$  (جواب)

$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{2x+3})^2 - (3)^2}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{2x+3} + 3)} \\ &= \frac{2x+3 - 9}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{2x+3} + 3)} \\ &= \frac{2x - 6}{(x^2 - 4x + 3)(\sqrt{2x+3} + 3)} \\ &= \frac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{2x+3} + 3)} \\ &= \frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x+3} + 3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(x-1)(\sqrt{2x+3} + 3)} \\ &= \frac{2}{2 \times 6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$\Delta > 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$\Delta = 0$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

$x_0 = -\frac{b}{2a}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}}$

$a \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^4 - 4x + 3}$

$= \frac{0}{0}$   $\Rightarrow$   $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 7x + 6) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 4x + 3) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 4x + 3) = 0$

$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$

$x^4 - 4x + 3 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)$

$1 \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad 3$

$1x \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -3$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad -3 \quad 0$

$Q(x) = x^3 + x^2 + x - 3$

$\frac{1}{6}$



طريقة القسمة الإقليدية (20)

$$\begin{array}{r}
 x^4 \\
 -4x+3 \overline{) x^4} \\
 \underline{-x^4 + x^3} \phantom{+ 3x^2 - 3x + 3} \\
 x^3 \\
 \underline{-x^3 + x^2} \phantom{+ 3x - 3} \\
 x^2 - 4x \\
 \underline{-x^2 + x} \phantom{+ 3} \\
 -3x + 3 \\
 \underline{+3x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

ومنه

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^4 - 4x + 3} = \frac{(x-1)(x-6)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)}$$

$$= \frac{x-6}{x^3 + x^2 + x - 3}$$

$$x^3 + x^2 + x - 3$$

نظر

طريقة هورن

	1	1	1	-3
1x	↓	1	2	3
	1	2	3	0

مضروب  $G(x)$

$$G(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$G^1$$

ومنه

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x-1)(x^2 + 2x + 3)$$

	$-\infty$		1	↓		$+\infty$
$x-1$		-	0		+	
$x^2 + 2x + 3$		+			+	
$(x-1)(x^2 + 2x + 3)$		-	0		+	

ΔX < 0

أ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-6}{x^3 + x^2 + x - 3}$

منه توجد طائفتان

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-6) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x - 3) = 0^+$$

1x	↓
	1

$$G(x) =$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 6}{x^3 + x^2 + x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 6) = -6 \quad \text{و} \quad = -\infty$$

$$x \geq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + x^2 + x - 3) = 0^+$$

$$x \geq 1$$

المقرر ٦٠

احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 + x + 6} \quad (1)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + 4x^2 + 1} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 7} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 + x + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} \quad (1) \text{ النهاية}$$

$$= 3$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + 4x^2 + 1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3} \quad (2) \text{ النهاية}$$

$$= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 2}{x^2 - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} \quad (3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x$$

$$= -\infty$$

المقرر ٦١

احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 7}} \quad (3) \text{ حساب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5}{2 - \sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 7}} \quad (2)$$



$$= \infty \text{ "funkt. } \in \mathbb{C}, \varepsilon, \delta$$

$$\frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$$

$$\frac{a}{c} \times b = a \times \frac{b}{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+5)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+5)(2+\sqrt{x})}{4-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{4-x} \times (2+\sqrt{x})$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{4-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4-x} = -1 \quad \text{Ü 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2+\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{7}{x^2})}} \quad \text{Ü 3 (2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{|x| \sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$a \geq 0, b \geq 0$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$x > 0 \quad \text{Ü 3} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x \sqrt{1-\frac{7}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}}$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2} = 0$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-7}}$$

$$\text{Ü 3 (3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{1}}$$



$$\frac{x}{a} \cdot \epsilon \cdot \tau \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e - \frac{1}{x})}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \quad \text{لما}$$

$$x < 0 \text{ فإن } x \rightarrow -\infty \quad \text{لما} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e - \frac{1}{x})}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x^2} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -e$$

المرتبة 2

احسب النهايتين الآتيتين:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x + 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x + 2) = +\infty \quad \text{لما (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 (1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{لأن}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x + 2) \quad \text{لما (2)}$$

لأننا نحتاج ع في الشكل "ا"  $\infty - \infty$   
لأننا نحتاج ع في الشكل "ب"  $\infty - \infty$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 1} - x + 2 &= \sqrt{x^2 - 1} - (x - 2) \\ &= \frac{[\sqrt{x^2 - 1} - (x - 2)][\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)]}{\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - 1} + (x - 2)} \end{aligned}$$



$$= \frac{x^2 - 1 - (x^2 - 4x + 4)}{\sqrt{x^2 - 1} + x - 2}$$

$$= \frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 - 1} + x - 2}$$

$$= \frac{x(4 - \frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} + x - 2}$$

$$= \frac{x(4 - \frac{5}{x})}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(4 - \frac{5}{x})}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + x - 2}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(4 - \frac{5}{x})}{x \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x}}$$

$$= 2$$

الترتيب 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 1} - x - 6)$$

هذا حالة عدم يقين من النوع  $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - x + 1} - x - 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \sqrt{x^2 \left( 9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - x - 6 \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( |x| \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x - 6 \right)$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x - 6 \right)$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{6}{x} \right]$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{9 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{6}{x} \right) = \sqrt{9 - 1} = 2 \quad \text{ن}^{\circ} 1$$

$x > 0 \quad \forall \frac{1}{x} \rightarrow 0 \quad \forall \frac{1}{x^2} \rightarrow 0$   
 $|x| = x$



المسألة (15)

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 3}$$

- (1) احسب نهايات الدالة عند حدود مجالها
- (2) خسر النتائج وبيانا

(1) حساب النهايات

$$D = ]-\infty, 3[ \cup ]3, +\infty[$$

أ)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$  لدينا

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$x-3$	$-$	$0$	$+$

ج)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) = 0^-$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} (e^x - 1) = 5$

د)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3) = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} (e^x - 1) = 5$

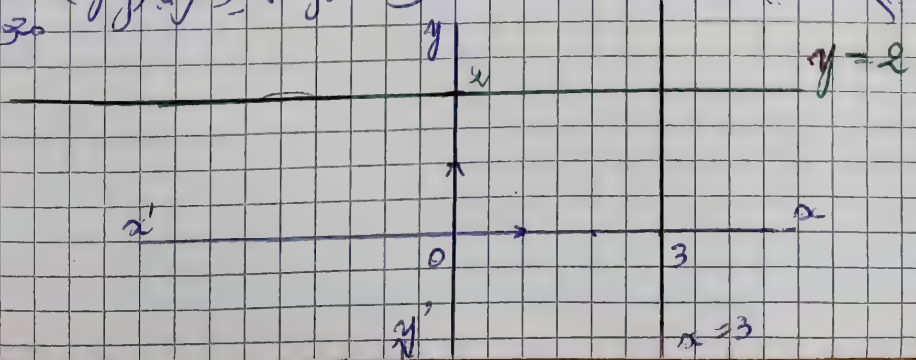
هـ)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$

(2) التفسير البياني

من حساب النهايات لدينا:

المستقيم الذي معادلته  $y = e$  مقارب لـ  $(f)$  يوازي  $(x')$  حامل

المستقيم الذي معادلته  $x = 3$  مقارب لـ  $(f)$  يوازي  $(y')$  حامل





المقرر (11)

في الدالة المخرجة على

$$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4}}$$

عن المسلمات المقابلة لـ (Cf) متساوي الدالة

(الربع للفرق للفرق)  
نوع 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{-x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

إذاً المستقيم الذي يمس الدالة  $y = -2$  مقارب لـ (Cf)

بوزن  $(x', x)$  عند  $(-\infty, -\infty)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 - \frac{1}{x})}{x\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

إذاً المستقيم الذي يمس الدالة  $y = 2$  مقارب لـ (Cf) بوزن

$(x', x)$  عند  $(+\infty, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{لأنها}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x-1) = -5 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2-4} = 0$$

ستنتج أن المستقيم الذي يمس الدالة

$x = -2$  مقارب لـ (Cf) بوزن  $(y', y)$

$x/3$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty}$

حاصل  
مكرر  
التفاضل  
حاصل  
مكرر  
التفاضل



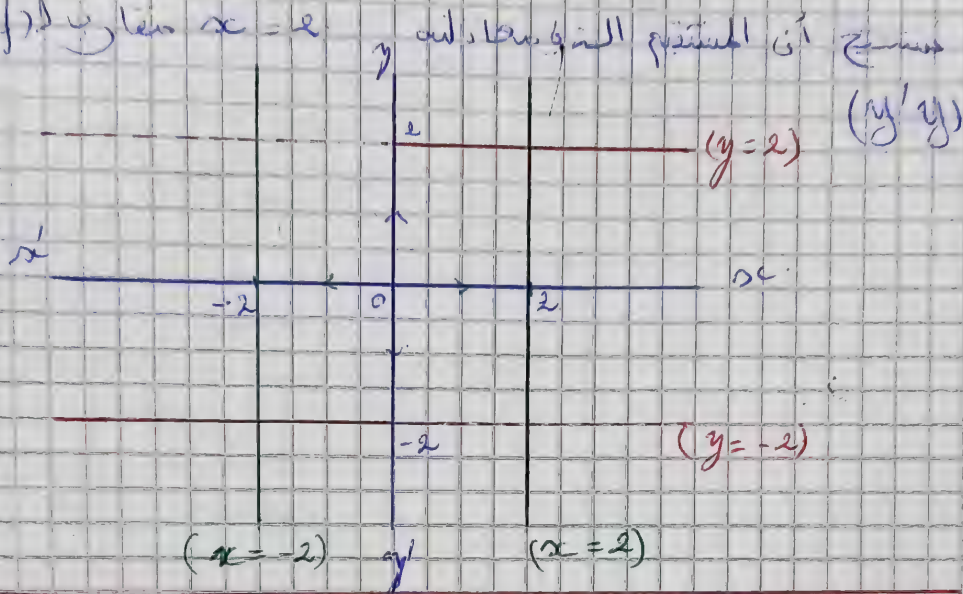
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4}}$$

لذا

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) = 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \neq +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-4} = 0^+$$

بما أن  $x=2$  هو نقطة



المستقيم  $y = ax + b$  الذي مقاديرته  $y = ax + b$  مقارب مائل لـ  $cf$  عند  $+\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty \text{ أو } -\infty)}} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

المعبر (12)

فالدالة المعروفة على  $[0, +\infty[$

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي مقاديرته

$$y = 2x + 3$$

مقارب مائل لـ  $(cf)$  عند  $+\infty$



+ ∞ is (cf) 1.  $f(x) = 2x + 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = 0$$

$x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)]$$

$x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x - 2)$$

$x \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)][\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)]}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x})^2 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2) = +\infty$$

+ ∞ is (cf) 1.  $f(x) = 2x + 3$

المعريف (13)

الدالة المعروفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$f(x) = \frac{5x^2 - 3x + 1}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x]$$

المعريف (13)

هل يوجد ثابت  $a$  بحيث  $f(x) \sim a$  عندما  $x \rightarrow +\infty$ ؟

$$Df = ]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{5x^2 - 3x + 1}{x + 2} - 5x \right]$$

$x \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow +\infty$



$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1 - 5x(x+2)}{x+2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-13x + 1}{x+2}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-13x}{x}$$

$$= -13$$

الاستنتاج:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] = -13$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x] + 13 = 0$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x + 13] = 0$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (5x - 13)] = 0$$

والمستقيم الذي معادله  $y = 5x - 13$  هو المقارب  
 $\infty \rightarrow +\infty$  من  $(C_f)$

الموضوع (14):

نعتبر الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

(1) عيبي الأعداد الحقيقية  $a, b, c, d$  حيث  $\forall x$  أجل كل عدد حقيقي

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

(2) استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيمة مقارباتاً مائلة  $(\Delta)$  عند  $+\infty$  وعند  $-\infty$ .

(3) حدد وصفاً  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(\Delta)$ .

نتيجة

$$f(x) = ax + b + g(x) \quad \text{إذا كانت}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$



(c.f) 1)  $f(x) = ax + b$

المطلوب (2)  $f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)^2}$

-  $a$  و  $b$  +  $a$   $ax$

$d, c, b, a$   $ax + b$

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

(ab)

$$f(x) = \frac{ax(x+1)^2 + b(x+1)^2 + cx + d}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax(x^2+2x+1) + b(x^2+2x+1) + cx + d}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{ax^3 + 2ax^2 + ax + bx^2 + 2bx + b + cx + d}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2} = \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a+2b+c)x + b+d}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$$

31

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=3 \\ a+2b+c=6 \\ b+d=3 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

طريقة التفاضل (3)  $f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)^2}$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \\ - x^3 - 2x^2 - x \\ \hline x^2 + 5x + 3 \\ - x^2 - 2x - 1 \\ \hline 3x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ - x^2 - 2x - 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$$

31  $\Rightarrow 3$

$f(x) = \frac{ax+b}{(x+1)^2}$

طريقة التفاضل (3)

$ax + b$  (3)



الإستنتاج  
بمات

$$f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+1} = 0$$

المستقيم الدار مماس لـ  $y = x + 1$  عند  $x = -\infty$

3) تحديد وضعية (Cf) بالنسبة لـ (Δ)

لـ إشارة وضعية (Cf) بالنسبة لـ (Δ) الذي هو معاد لـ  $y = x + 1$   
نحسب الفرق  $f(x) - y$  ثم ندرسه إشارة

$$f(x) - y = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2} - (x+1) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

م	$f(x) - y$	م	إشارة
			$-\frac{2}{3}$
$3x+2$	-	-	0
$(x+1)^2$	+	+	+
$f(x) - y = \frac{3x+2}{(x+1)^2}$	-	-	0
وضعية (Cf) بالنسبة لـ (Δ)	تحت (Cf) (Δ)	تحت (Cf) (Δ)	فوق (Cf) (Δ)

$$x = -\frac{2}{3} \text{ من أجل}$$

$$y = x + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

$$(Cf) \cap (\Delta) = \{A\}$$

$$A(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$



المسألة 15

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

غير متصلة له المستقيم المقارب المائل

عند  $+\infty$  و  $-\infty$

$$D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x$$

$$= \pm\infty$$

احتمال وجود مستقيم مقارب مائل

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2 x} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x(x-1)^2} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$a = 1$$

نحسب

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} - x \right] \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + 7x - 4}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \end{aligned}$$



$$l = -2$$

أي  $l$  إذن المستقيم  $(\Delta)$  الذي يمس الدالة  $y = x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$

ط (2) لـ  $\Delta$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\ -x^3 + 2x^2 - x & \hline 0 - 2x^2 + 7x - 4 & \\ + 2x^2 - 4x + 2 & \\ \hline 3x - 2 & \end{array}$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  الذي يمس الدالة  $y = x - 2$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$  أو  $-\infty$

ملاحظة:

$$f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$$

$(\Delta): y = 2x + 3$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$

$(\Delta'): y = -1$  مقارب لـ  $(C_f)$  يوازي  $(x'x)$  عند  $-\infty$

العدد المشتق

تعريف

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$   
 $a$  عدد حقيقي من  $I$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \quad \text{يعني: } f \text{ يقبل الاشتقاق عند } a$$

حيث  $l \in \mathbb{R}$

$l$  يسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$  ونرمز له بالرمز  $f'(a) = l$



$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \right.$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

التمرين (16)

باستعمال تعريف الحد المتيق

احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} \quad \text{حساب (1)}$$

"0/0" من الشكل  $\epsilon - \delta - \epsilon$

$$D_f = ]-\infty; +\infty[ \text{ حيث } f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad \text{نضع}$$

$$(f(1) = \sqrt{2} \quad (1))$$

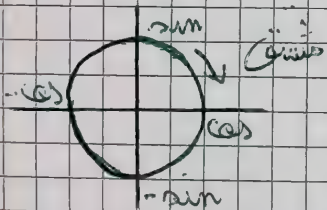
بأن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

(وبصفة خاصة قابلة للاشتقاق عند 1)

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{إذن}$$



$$\sin 0 = 0$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{حساب (2)}$$

"0/0" من الشكل  $\epsilon - \delta - \epsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{نضع } f(x) = \sin x$$

$$(f(0) = \sin 0 = 0 \quad (1))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$



17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

بما أن  $f$  قابلة للاستمرار في  $\mathbb{R}$   
(أو صيغة خاصة قابلة للاستمرار في  $0$ )

إذن  $f(x) = \cos x$

وحيث  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$= f'(0)$

$f'(0) = \cos 0$  إذن  $= \cos 0$

$= 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3) حساب  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

$\frac{0}{0}$  ع-ع من الشكل

لأن  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) = 0$

نضع  $D_f = \mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \cos x$

(أي  $f(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ )

بما أن  $f$  قابلة للاستمرار في  $\mathbb{R}$

(أو صيغة خاصة في  $\frac{\pi}{2}$ )

إذن  $f'(x) = -\sin x$

وحيث  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}}$

$= f'(\frac{\pi}{2})$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2}$  إذن  $= -1$

$= -1$

ملحوظة

$$\left\{ \begin{array}{l} \infty + \infty = +\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \\ (-\infty)(-\infty) = +\infty \\ (+\infty)(-\infty) = -\infty \end{array} \right.$$



احسب النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \tan 0 &= 0 \\ \tan 0 &= \frac{\sin 0}{\cos 0} \\ &= \frac{0}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x$$

النتيجة = 0

"0" كحل في  $\epsilon - \delta$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \tan x &= \tan 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x &= 0 \end{aligned}$$

كحل في  $\epsilon - \delta$

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x}$$

النتيجة

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0}$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

النتيجة = 2

"0" كحل في  $\epsilon - \delta$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times 2$$

النتيجة

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} &= 1 \\ u &= 2x \end{aligned}$$

$$= 1 \times 2 = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{x}$$

120

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin x}{x} \cos x = 2$$

"0/0" form  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3x}{4x} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} 4x}$

$$= 1 \times \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

$$\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

$$= 1 \times \frac{1}{1 + \cos 0} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a$$



$$(f^n)' = n f^{n-1} \times f'$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\beta \neq 0$$

النهارات بالمعارة

مبرهنة:

$f, g, h$  و  $h$  دوال و  $l$  عدد حقيقي  
إذا كانت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{فإن}$$

من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

(1) يتبين أنه من أجل عدد حقيقي  $x$

$$-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$$

$$-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$$

$$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases} \quad \text{بما أن}$$

$$-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$$

استنتاج

$$-2 \leq \cos x + \sin x \leq 2$$

بما أن  $x \in \mathbb{R}^*$  من أجل كل

$$-2 \times \frac{1}{x^2} \leq (\cos + \sin x) \times \frac{1}{x^2} \leq 2 \times \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{x^2} > 0\right)$$

النسبة "0"

$$\cos^2 x$$

$$\sin^2 x$$

$$\cos^2 x$$

$$\sin^2 x$$

$$\cos^2 x =$$



$$-\frac{2}{x^2} < \frac{\cos x + \sin x}{x^2} < \frac{2}{x^2} \text{ أي } 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x^2} = 0 \quad \text{و مما أن}$$

إذن حسب مبرهنة القصر لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2} = 0$$

التمرين (13)

دالة جيب من أجل كل عدد حقيقي  $x \geq 0$

$$|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2 + 1}$$

هل تقبل الدالة نهاية عند  $+\infty$  ؟

(14)

نبات

$$|x| \leq x \quad \text{يعني} \quad -x \leq x \leq x \quad x \geq 0$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} < f(x) - 3 < \frac{1}{x^2 + 1} \text{ يعني } |f(x) - 3| < \frac{1}{x^2 + 1} \quad \text{إذن}$$

$$3 - \frac{1}{x^2 + 1} < f(x) < 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \text{ أي}$$

بعد إضافة 3 لكل طرف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 3 \quad \text{و مما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 3 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 3$$

إذن حسب مبرهنة القصر لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

نلاحظ أن

$$|x| \geq 0 \quad \text{لأن} \quad 0 < |f(x) - 3| < \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{و مما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x) - 3| = 0 \quad \text{إذن} \quad \text{(مبرهنة القصر)}$$



5

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3 \quad \text{and } g$$

فروود النان  
اذا كانت

فإن  $x \rightarrow +\infty$   $g(x) = +\infty$   
 $f(x) \geq g(x)$  و

عبر عنه (الفعل الاعلى)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$   
 $f(x) \leq g(x)$

از باب ۱

الفرق بين (٢٥)

۸) بین آنہ من اجل کل عدد ۵۰ دیکھو:

$$x^2 - 3 \sin x \geq x - 3$$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3 \sin x)$  النتيجة

(١) إثبات أن  $x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3$

بيان  $-1 \leq \sin x \leq 1$

از آن  $-3 \times 1 \geq -3 \sin x \geq -3 \times (-1)$  به صورت کلافه

في العدد السالب (3-)

$$3 \cancel{>} -3 \sin x \cancel{>} -3$$

$$(f) \quad x^2 \sin x + 3 \geq x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3 \quad \text{ausg}$$

$$x^2 - 3 \sin x > x^2 - 3$$



(2) استنتاج

بما أن

إذن حسب مبرهنة  
الحد الأسفل لدينا:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 3 \sin x \geq x^2 - 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3) = +\infty \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3 \sin x) = +\infty$$

التمرين (2)

(1) من أجل

(2) استنتاج

(1) مقارنة

لدينا

بما أن

(2) استنتاج

إذن

$$\lim (x^2 - 3 \sin x)$$

(2) استنتاج

بما أن

التمرين (2)

1) من أجل  $x > 0$  فارق  $\sqrt{4x^2+5}$  و  $2x$ .

$$(2) \text{ استنتاج } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+5} - x)$$

1) مقارنة  $\sqrt{4x^2+5}$  و  $2x$  حيث  $x > 0$

$$\sqrt{4x^2+5} > 0 \text{ و } 2x > 0$$

إذن لمقارنة  $\sqrt{4x^2+5}$  و  $2x$

ننظر في مربعيهما.

$$(2x)^2 < (\sqrt{4x^2+5})^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} (2x)^2 = 4x^2 \\ (\sqrt{4x^2+5})^2 = 4x^2 + 5 \end{array} \right. \quad \text{بما أن}$$

$$2x < \sqrt{4x^2+5} \text{ وحيث}$$

$$2x - \sqrt{4x^2+5} \quad \text{2) نحسب الفرق}$$

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{4x^2+5} &= \frac{(2x - \sqrt{4x^2+5})(2x + \sqrt{4x^2+5})}{2x + \sqrt{4x^2+5}} \\ &= \frac{4x^2 - (4x^2+5)}{2x + \sqrt{4x^2+5}} \end{aligned}$$

$$\frac{-5}{2x + \sqrt{4x^2+5}} < 0 \quad \text{لأن } -5 < 0 \text{ و } 2x + \sqrt{4x^2+5} > 0$$

$$2x - \sqrt{4x^2+5} < 0 \text{ وحيث}$$

$$2x < \sqrt{4x^2+5} \text{ أي}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+5} - x)$$

(2) استنتاج

$$2x < \sqrt{4x^2+5}$$

بما أن

إذن  $2x - x < \sqrt{4x^2+5} - x$  إضافة  $-x$  للطرفين

$$x < \sqrt{4x^2+5} - x$$

أو

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  إذن حسب مبرهن الحد الأدنى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+5} - x) = +\infty$$

التمرين (2.2)

(1) من أجل  $x > 1$ ، قارن  $2x$  و  $\sqrt{2x^2-1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2-1} - 3x)$$

(2) استنتاج

(1) مقارنة  $2x$  و  $\sqrt{2x^2-1}$  حيث  $x > 1$

$$(2x)^2 = 4x^2 \quad \text{لأن } 2x > 0$$

$$\sqrt{2x^2-1} > 0 \quad (\sqrt{2x^2-1})^2 = 2x^2-1$$

$$4x^2 - (2x^2-1) = 2x^2+1 > 0 \quad \text{بما أن}$$

$$2x > \sqrt{2x^2-1} \quad \text{و} \quad 4x^2 > 2x^2-1 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2-1} - 3x)$$

(2) استنتاج

$$2x > \sqrt{2x^2-1} \quad \text{بما أن}$$

إذن  $2x - 3x > \sqrt{2x^2-1} - 3x$  إضافة  $-3x$  للطرفين

$$-x > \sqrt{2x^2-1} - 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \quad \text{و بما أن}$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2-1} - 3x) = -\infty \quad \text{إذن (مبرهن الحد الأدنى)}$$



# قواعد دالة مركبة

مترجمة

$a, b, c$  أعداد حقيقية  $a \rightarrow \infty$  أو  $a \rightarrow -\infty$

$f = v \circ u$  حيث  $u, v$  دوال

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$

$\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$

ثان  $\lim_{x \rightarrow a} (v \circ u)(x) = c$

$f = v \circ u$

$f$  مركبة الدالتين  $u$  و  $v$

على الترتيب

$(v \circ u)(x) = v[u(x)]$

المترجمة (23)

احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^3 + x - 3} \quad (4)$$

1/10

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} \text{ نضع}$$

$f = v \circ u$  فلا حظ أن

$$v(x) = \sqrt{x} \text{ و } u(x) = \frac{x-1}{2x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} v(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ و}$$



$$t = \frac{x-1}{2x-4}$$

فرض 1/2 ب

$$t \rightarrow \frac{1}{2}$$

و با  $x \rightarrow +\infty$  و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{2x-4}} = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{t} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right) \quad \text{فرض 1/2}$$

$$y = \frac{\pi x + 3}{1+x}$$

فرض 1/2

$$y \rightarrow \pi \quad \text{و با } x \rightarrow -\infty \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right) = \lim_{y \rightarrow \pi} \sin y = \sin \pi = 0 \quad \text{و}$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right) \quad \text{فرض 1/2}$$

$$f = v \circ u$$

و با  $x$

$$v(x) = \sin x, \quad u(x) = \frac{\pi x + 3}{1+x} \quad \text{فرض 1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{و}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi x + 3}{1+x} = \pi \\ \lim_{x \rightarrow \pi} v(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \sin x = \sin \pi = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \quad \text{فرض 1/3}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} \quad \text{فرض 1/3}$$

$$f = v \circ u$$

و با  $x$

$$u(x) = x - \pi$$

فرض 1/3

$$v(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 1 \quad \text{و}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pi} u(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



المترين (25)  
 دالة  $f$

احسب (1)

حل (2)

احسب (1)

نضع  $t = x - \pi$   
 فان  $x \rightarrow \pi$  فان  $t \rightarrow 0$   

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$
 إذن

احسب (4)  

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + x - 3}$$

نضع  $t = -2x^3 + x - 3$   
 فان  $x \rightarrow -\infty$  فان  $t \rightarrow +\infty$

ان  $t \rightarrow +\infty$   

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-2x^3 + x - 3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} = +\infty$$

la continuité

الاستمرارية

تعريف

دالة معرفة بتعيينها  $D_f$  و  $a$  عدد حقيقي غير معزول من  $D_f$   

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$
 معناه  $f$  مستمرة عند  $a$

المترين (26)  
 دالة  $f$

ع (1)

حل (2)

تعين (3)

معرفة  $f$

المترين (24)

دالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

هل الدالة  $f$  مستمرة عند 1 ؟

لدينا  $D_f = \mathbb{R}$

$f$  مستمرة عند 1 معناه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

بما أن  $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$   

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ارجع للمترين رقم 16 الحالة 2)

إذن  $f$  مستمرة عند 1



التمرين (25)  

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right); x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2. هل  $f$  مستمرة عند 0؟

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

لدينا  $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

إذن  $-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$  بعد ضرب كل طرف في  $x^2$

وبما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$  (لأن  $x^2 \rightarrow 0$ )

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

إذن حسب مبرهنة الحصر لدينا:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

8.  $f$  مستمرة عند 0، معناه  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

(ملاحظة حسب السؤال واحد 1)

التمرين (26)

$f$  دالة معرفة كما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x(x-3)} + \sqrt{x(x+3)} + e$$

1. عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ ؟

2. هل  $f$  مستمرة عند 0؟

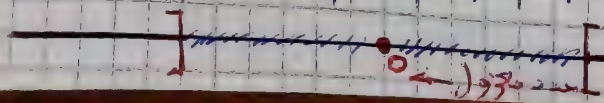
1. تعيين  $D_f$

$f$  معرفة من أجل

$$\begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ x(x+3) \geq 0 \end{cases}$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$0$	$3$	$+\infty$
$x(x-3)$	+	+	0	-	+
$x(x+3)$	+	-	0	+	+

$D_f = ]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[ \cup \{0\}$





ف لست مستمرة عند 0 لأن العدد 0 محظوظ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{محتاج}$$

f مستمرة على حين a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{محتاج}$$

f مستمرة على يسار a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{محتاج}$$

f مستمرة عند a

f مستمرة عند كل عدد حقيقي

f مستمرة على مجال I يعني

### النتيجة الأساسية

تكون الدالة f مستمرة على مجال I عند ما يمكن (نفس) منضاه  
الأساسي على هذا المجال (دون) رفع القلم (اليد)

التمرين (23)

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x + 1 & ; x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + x - 5 & ; x > 2 \end{cases}$$

أدرس استمرارية f عند 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \quad \text{محتاج}$$

$$f(2) = 2^2 - 2(2) + 1 = 1 \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5) = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

2 is a root of  $f$  and  $g$

القسم الثاني للامتحان

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \lim_{x \in ]-\infty, 2]} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$2x - 2 = 0 \text{ since } f'(x) = 0$$

$$x = 1$$

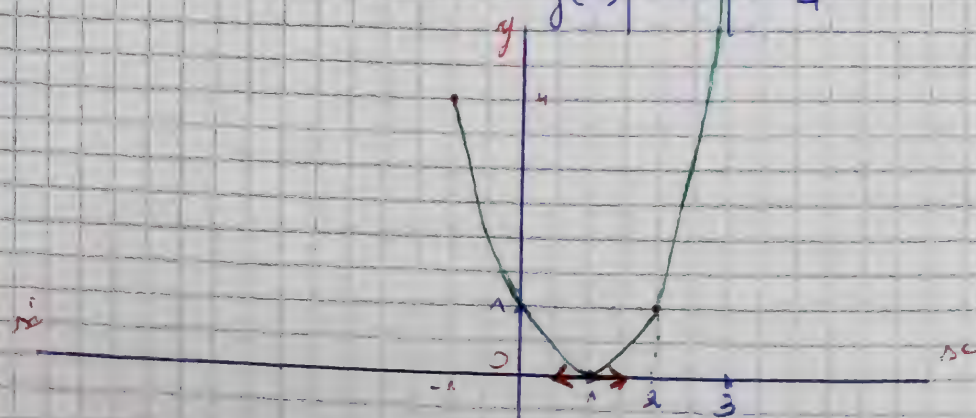
$x$	$-\infty$	1	2
$f'(x) = 2x - 2$	-	0	+

$x$	$-\infty$	1	2
$f(x)$	-	0	+
	$+\infty$	0	1

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 1 = 0$$

one root of  $f$

$x$	0	-1
$f(x)$	1	4





$$f(x) = x^2 + x - 5 \quad \text{من أجل } x \in ]2, +\infty[ \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (c)$$

$$f(2) = 1 \quad (\text{حسب السؤال السابق})$$

$$f'(x) = 2x + 1 \quad (d)$$

$$x > 2 \quad \text{نلاحظ أن } f'(x) > 0 \quad \text{لأن } x > 2$$

	2		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	
$f(x)$	1		$+\infty$

$$f(3) = 7$$

التمرين (28)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $[-2, 4]$  كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x; & x \in [-2, 1] \\ f(x) = x - 1; & x \in [1, 4] \end{cases}$$

1. مثل بيانيا الدالة  $f$  في معلم متعامد وقعا نرى  $(\vec{i}, \vec{j}, 0)$

هل تقبل الدالة  $f$  نهاية عند 1؟

2. هل الدالة  $f$  مستمرة على  $[-2, 4]$ ؟ لماذا؟

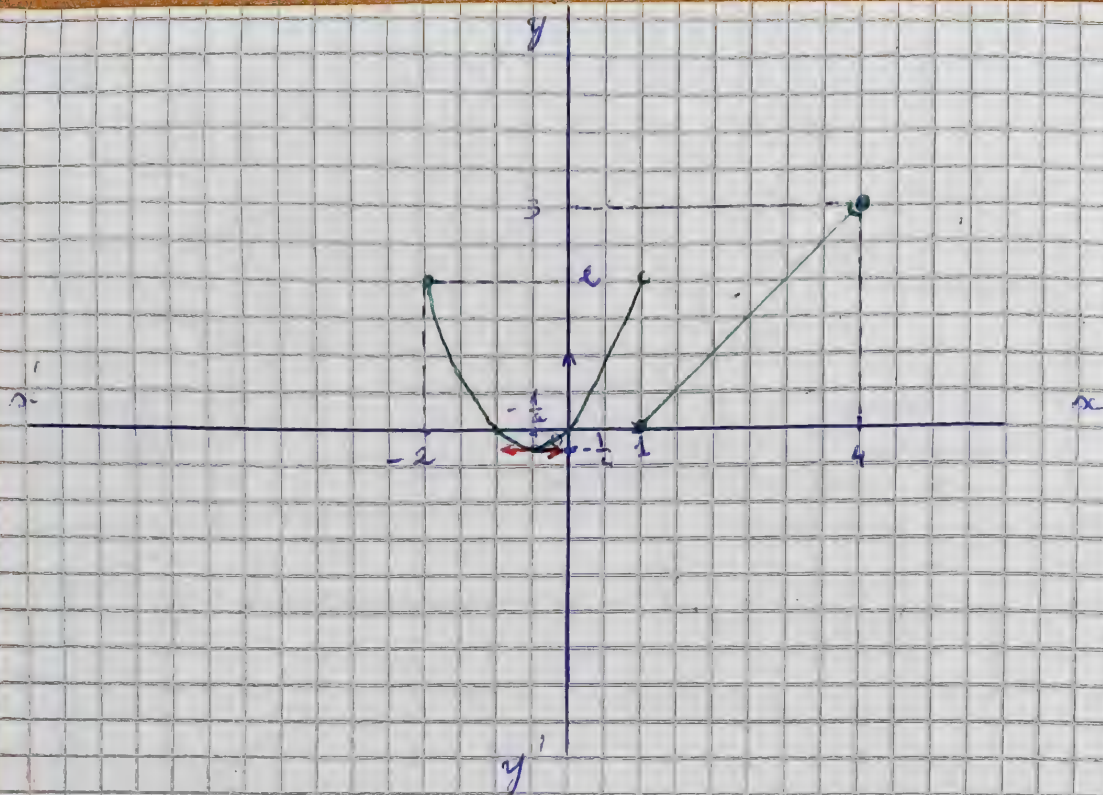
3. أذكر ~~نوع~~ مجال تكون الدالة  $f$  مستمرة عليه.

4. تمثل مدخل الدالة  $f$

$$f(x) = x - 1 \quad \text{من أجل } x \in [1, 4] \quad \text{لدينا}$$

	1	4
$f(x) = x - 1$	0	3





$$f(x) = x^2 + x \quad \text{لـ } x \in [-2, 1] \quad \text{مجال (0)}$$

$$f'(x) = 2x + 1 \quad \text{لـ } x$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{حيث } f'(x) = 0$$

$x$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$1$
$f'(x) = 2x + 1$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$2$	$-\frac{1}{4}$	$2$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$f(-2) = (-2)^2 + (-2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{لأن نهاية عند } 1 \text{ لا توجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad \text{لأن } [-2, 1] \text{ ليست متصلة عند } 1$$

أول رسم (f) برقع الضلع



$$f \text{ مستمرة على } [-2, 1]$$

$$f \text{ مستمرة على } [-2, 5]$$

$$f \text{ مستمرة على } [0, 1]$$

$$f \text{ مستمرة على } [1, 4]$$

نتائج:

- (أ) الدوال المرحلية مستمرة على كل مجال من مجموعته تقريبا
- (ب) الدوال كثيرات الحدود مستمرة على  $\mathbb{R}$
- (ج) الدوال الناحية (حاصل قسمة كثير حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعته تعريفها

المقري (29)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 - x) \sin x$$

هل الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ؟

بما أن  $x^2 - x$  مستمرة على  $\mathbb{R}$   
(دالة كثير حدود)

و  $\sin x$  مستمرة على  $\mathbb{R}$

إذن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  كأحد الدالتين السابقتين

المقري (30)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 - 9x + 14}$$

أدري أن استمرارية  $f$

$f$  معرفة من أجل  $x^2 - 9x + 14 \neq 0$

$$\Delta = (-9)^2 - 4(1)(14)$$

$$= 81 - 56$$

$$= 25$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 9 \quad x_1 = \frac{9+5}{2} = 7$$

$$x_1 x_2 = 14 = 7 \times 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{9-5}{2} = 2 \end{array} \right.$$

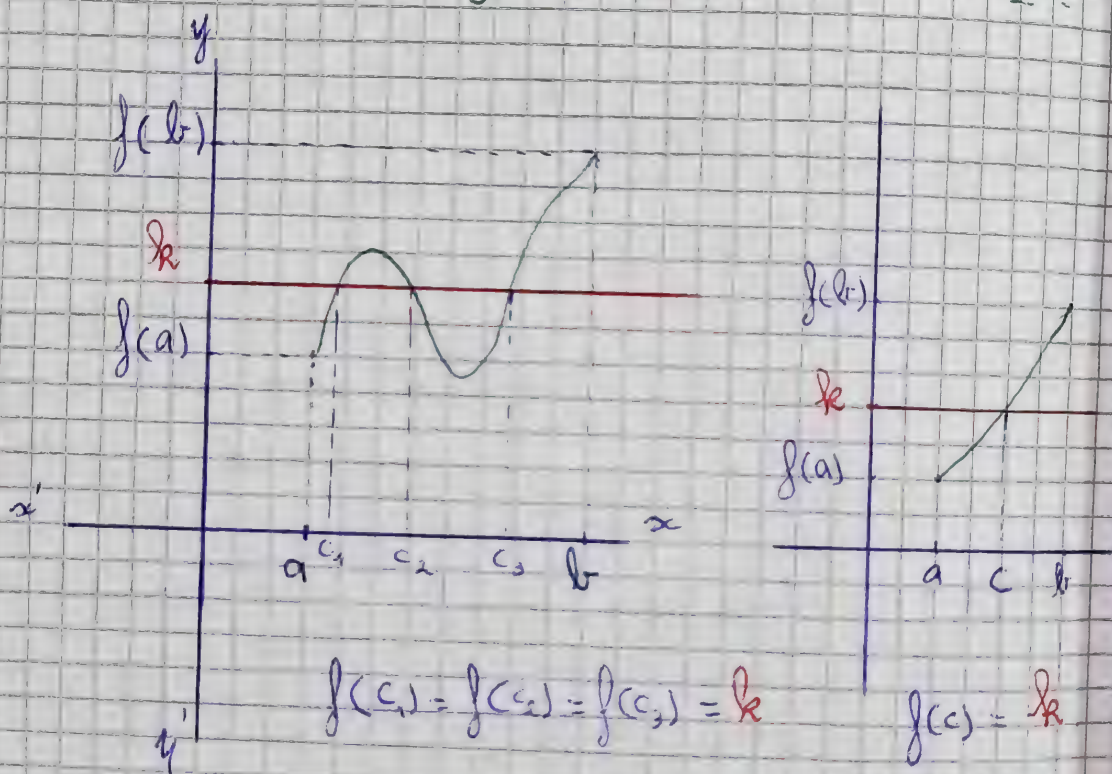
وهنا



أي  $D_f = ]-\infty, 2[ \cup ]2, 7[ \cup ]7, +\infty[$   
 بيان  $f$  دالة فاطقة، إذن  $f$  مستمرة على  $]-\infty, 2[$  وعلى  $]2, 7[$  وعلى  $]7, +\infty[$

مبرهنة القيمة المتوسطة

$f$  دالة مستمرة ومستمرة على مجال  $[a, b]$   
 صاغل كل عدد حقيقي  $k$  محصون بين  $f(a)$  و  $f(b)$   
 يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  محصون بين  $a$  و  $b$  بحيث  $f(c) = k$



المشروع (31)

بين أن المعادلة الآتية تقبل على الأقل حلا في المجال  $I$   
 $-x^3 + 3x^2 = 3$

$$I = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

نضع  $f(x) = -x^3 + 3x^2$   
 فما أن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  (دالة كثير حدود)

إذن  $f$  مستمرة على  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

وحيث أن  $f(1) < 3 < f\left(\frac{3}{2}\right)$  إذن  $\left\{ \begin{array}{l} f(1) = -(1)^3 + 3(1)^2 = 2 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8} \end{array} \right.$



إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة،  
المعادلة  $3 = f(x)$  تقبل على الأقل حل في  $I$

إذا كانت  $f$  مستمرة على  $[a, b]$  فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  محصور بين  $a$  و  $b$  حيث  $f(c) = 0$   $f(a) \times f(b) < 0$

إذا كانت  $f$  مستمرة على  $[a, b]$  و  $f(a) \times f(b) < 0$  و  $f$  رتيبة تماماً

فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $c$  بين  $a$  و  $b$  حيث  $f(c) = 0$

التمرين (32)

بين أن المعادلة  $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$  تقبل حلاً وحيداً في المجال  $[\frac{5}{2}, 3]$

نضع  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$

(1) لدينا  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  وصفة خاصة على  $[\frac{5}{2}, 3]$  (دالة كثيرة حدود)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\frac{5}{2}) = -3 \\ f(3) = 6 \end{array} \right. \text{ أي } f(\frac{5}{2}) \times f(3) < 0$$

(2) ندرس رتبة  $f$

لدينا  $f'(x) = 6x^2 - 10x$

$f'(x) = 0$  محناه  $6x^2 - 10x = 0$

$$\text{أي } x(6x - 10) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = \frac{5}{3} \end{array} \right.$$



$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	$3$	$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 10x$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

إذن  $f$  متزايدة تمامًا على  $[\frac{5}{2}; 3]$

لأن  $[\frac{5}{2}; 3]$  جزء من  $[\frac{5}{3}; +\infty]$

$$f'(x) > 0 \text{ أي}$$

إذن حسب جبرهنة القيم المتوسطة

$$f(x) = 0$$

تقبل حلًا وحيداً  $x$  حيث  $x \in [\frac{5}{2}; 3]$

التمرين (33) : Bacc E 2014

الموضوع (2) التمرين (4) (7 نقاط)

$$D_g = \mathbb{R} \text{ حيث } g(x) = 2x^3 - (x^2 + 7x - 4) \quad (I)$$

أ/ احسب حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7 \text{ لدينا } x \in \mathbb{R} \text{ من أجل}$$

ندرس إشارة  $g'(x)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 64 - 4(6)(7)$$

$$= 64 - 168$$

$$= -104$$

$$\Delta < 0 \text{ أي}$$

$$6x^2 - 8x + 7 > 0 \text{ وممت}$$



$$g'(x) > 0 \text{ أي}$$

وبالتالي و متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$

تشكيل جدول التغيرات

$x$	$-\infty$		$+\infty$	
$g'(x)$		+		
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$

(2) أ) تبين أن  $g(x) = 0$  قبل  $x$  وبعيداً  $x$  حيث  $0.7 < x < 0.8$

بأن  $g$  مستمر على  $\mathbb{R}$  (دالة كثير حدود) وبصفة خاصة

على  $[0.7; 0.8]$

و  $g$  متزايدة تماماً (حسب السؤال 1) -

$$g(0.7) \times g(0.8) < 0 \text{ أي } \begin{cases} g(0.7) = 2(0.7)^3 - 4(0.7)^2 + 7(0.7) - 4 = -0.374 \\ g(0.8) = 2(0.8)^3 - 4(0.8)^2 + 7(0.8) - 4 = 0.064 \end{cases}$$

إذن حسب مبرهن القيمة المتوسطة المتبادلة  $g(x) = 0$

قبل  $x$  وبعيداً  $x$  حيث  $0.7 < x < 0.8$

ب) استنتاج إشارة $g(x)$			
$x$	$-\infty$	$x$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(1) إذا كان  $x < x_0$  فإن  $g(x) < g(x_0)$

$$g(x) < 0$$

(2) إذا كان  $x > x_0$  فإن  $g(x) > g(x_0)$

$$g(x) > 0 \text{ أي}$$

II  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(1) حساب



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$$

$$= +\infty$$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$  أن

من أجل  $x \in \mathbb{R}$  لينا

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2-2x+1) + 1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x \\ \hline x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x \\ \hline x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \\ -x^2 + x - \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{-3x+1}{2(2x^2-2x+1)}$$

(ب) استنتاج أن  $(f)$  يقبل مستقيماً مقارباً حاداً (د)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

إذن المستقيم (د) الذي مقارب لـ  $y = \frac{1}{2}(x+1)$  مقارب حاد

لـ  $(f)$  عند  $+\infty$  و  $-\infty$



(ج) - دراسة وضوح (Cf) و (Δ)

حسب  $f(x) - y$  في إشارة

$$f(x) - y = \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1 - 3x$	+	0	-
$2(2x^2 - 2x + 1)$	+	+	+
$f(x) - y$	+	0	-
وضوح (Cf) بالأسفل	(Δ)	(Cf) فوق (Δ)	(Cf) تحت (Δ)

من أجل  $x = \frac{1}{3}$

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

(Cf) يقطع (Δ) في

النقطة  $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$f'(x) = \frac{x f(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

(3) أ) تبين أن

بيان  $f$  - الناطقة هي قابلية الاشتقاق على مجال تعريفها

$$\left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$$

$v \neq 0$

$$f'(x) = \frac{(3x^3 - 4)(2x^2 - 2x + 1) - (4x - 2)(x^3 - 2x + 1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 4x^2 + 4x - 2 - 4x^4 + 8x^2 - 4x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$



$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

استنتاج استنتاج  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$x$	$+\infty$
$x$	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0

حول تغيرات  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$x$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	1	$f(x)$	$+\infty$

$$f(0) = \frac{0^3 - 2(0) + 1}{2(0)^2 - 2(0) + 1} = 1$$

$$f(x) = -0, 1$$

حساب  $f(1)$

$$f(1) = \frac{1^3 - 2(1) + 1}{2(1)^2 - 2(1) + 1}$$

$$f(1) = 0$$

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$x \in D_f$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x + 1 \\ - x^2 + x \\ \hline x^2 - 2x + 1 \\ - x^2 + x \\ \hline -x + 1 \\ -x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x^2 + x - 1 \\ \hline \end{array}$$



$$(x-1)(x^2+x-1)$$

$$\text{و منه } f(x) = 0$$

$$\begin{cases} x-1=0 \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$$

أ

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-1) = 5$$

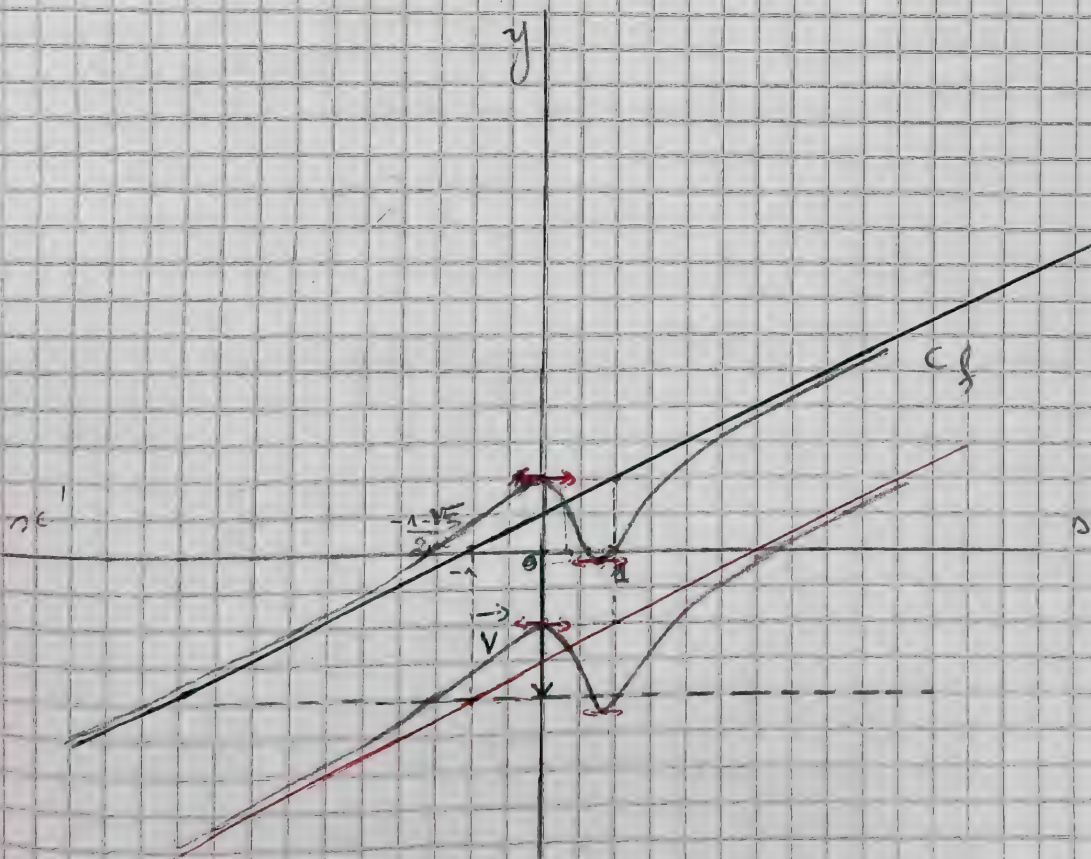
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

و منه مجموعة حلول المعادلة  $f(x) = 0$  هي:

$$S = \left\{ 1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$$

(5) إنشاء (د) و (C<sub>f</sub>)

$x$	1	-1
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	1	0



y'



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

16

$$h(x) = f(x) - 2$$

(أ) نتحقق أن

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2$$

لدينا

$$= \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$= h(x)$$

ب) لاستنتاج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  نتحول نقطي بسيط يطلب

تعيينه

$$g(x) = f(x + \alpha) + \beta$$

$$\rightarrow V(-\alpha, \beta) \text{ باستطاعتنا كتابة } (C_g) \text{ هو صورة } (C_f)$$

$$\rightarrow h(x) = f(x + 0) - 2 \text{ بما أن } V(0, -2) \text{ باستطاعتنا كتابة } (C_h) \text{ هو صورة } (C_f)$$

حل التمرين (34)

تعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بـ  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-a}$

$a, b, c$  أعداد حقيقية

عطيني جدول تغيرات  $f$  كما يلي

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$	3	$+\infty$

① حسب  $f'(x)$



$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

ف قابلية الاشتقاق على  $]-\infty, 1[$  وعلى  $]1, +\infty[$  (دالة مقلوبة)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (1)$$

$$f'(x) = a + 0 - \frac{c \times 1}{(x-1)^2} \quad \text{أي}$$

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2} \quad \text{أي}$$

$$\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2} \quad (2)$$

(2) اعتماداً على جدول تغيرات  $f$   
(1) عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{1}{5x^3 - x^2 + x - 7} \quad \text{مثال 2!}$$

$$h'(x) = -\frac{15x^2 - 2x + 1}{(5x^3 - x^2 + x - 7)^2}$$

$$\begin{cases} a - \frac{c}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + \frac{c}{\frac{1}{2} - 1} = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + \frac{c}{\frac{3}{2} - 1} = 3 \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{-7}{x^2 + x - 6} \quad \text{مثال 1}$$

$$h'(x) = -\frac{7(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

$$\begin{cases} a - 4c = 0 \\ a + 2b - 4c = 2 \\ 3a + 2b + 4c = 6 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} a = 4c \\ a + 2b - a = 2 \\ 4a + 2b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{1}{4} \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

بالدالة f معك اجابتك

بما ان صورتي الحد بين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{3}{4}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{4}\right) \quad \text{اذن} \quad \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

التمرين (35)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x} & ; x \leq 0 \\ 2x - \frac{1}{(x+1)^2} & ; x > 0 \end{cases}$$

١. اوجد مجموعة تعريف الدالة f

$$D_f = ]-\infty, 0] \cup ]0, +\infty[$$

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

$$\text{اذن } \frac{1}{2} \notin ]-\infty, 0] \text{ و } 1 \notin ]0, +\infty[$$

٢. ادرس استمرارية f عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = \frac{3(0)^2 + 2(0) - 1}{1 - 2(0)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x - \frac{1}{(x+1)^2}\right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = -1$$

و f مستمرة عند 0



# ب) ادرس قابلية اشتقاق f عند 0

(f قابلة للاشتقاق عند  $x_0$ )

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

$l \in \mathbb{R}$  حقيقي

f قابلة للاشتقاق عند 0  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = l$  و  $l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(0) = -1 \quad \text{نجد} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{(x+1)^2} - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x+1)^2 - 1 + (x+1)^2}{x(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x^2 + 2x + 1) - 1 + x^2 + 2x + 1}{x(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x^2 + 2x + 1) + x^2 + 2x}{x(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x^2 + 2x + 1) + x^2 + 2x}{x(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2x^2 + 5x + 4)}{x(x+1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(2x^2 + 5x + 4)}{(x+1)^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3x^2 + 2x + 1}{1 - 2x} - (-1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x + 1 + (1 - 2x)}{x(1 - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x(1 - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1 - 2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1-2x}$$

= 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

و منه

أي  $f$  غير قابلة للتشقق عند 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4$$

ر. م. ط. ٢

٠. ما أن

أي  $f$  قابلة للتشقق على  $\mathbb{R}$

$$f'_d(0) = 4$$

ونكتب

الاحد المشتق للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

$$f'_d(0) = 4 \text{ هو معامل توجيه (أو ميل) المماس لـ } (C_f) \text{ على } \mathbb{R}$$

معادلة نصف المماس على  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

هي

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ أي}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

٠. ما أن

أي  $f$  قابلة للتشقق على  $\mathbb{R}$  ونكتب:

$$f'_d(0) = 0$$

٨

٠.  $f'_d(0) = 0$  هو معامل توجيه نصف المماس لـ  $(C_f)$  على  $\mathbb{R}$

معادلة نصف المماس لـ  $(C_f)$  على  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y = f'_d(0)(x - 0) + f(0) \\ \text{أي} \\ x \leq 0 \end{cases}$$

١. ٥٥

$$\begin{cases} y = -1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$



بما أن (\*\*\*)

$$\begin{aligned} f'(0) &= 4 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

أي:  $f'(0) \neq f(0)$

إذن النقطة  $A(0; f(0))$

أي  $A(0; -1)$  تسمى نقطة زاوية

0

التفسير الهندسي

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4 \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \quad \text{و}$$

إذن النقطة  $A(0; f(0))$

أي  $A(0; -1)$  نقطة زاوية

ولذلك نضع مماس (C) عند A

(3) دراسة تغيرات f

(\*) من أجل  $x \in ]-\infty; 0]$  لدينا:  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{3x}{2} \right)$$

$$= +\infty$$

بما أن f قابلة للاشتقاق على  $]-\infty; 0]$  إذن:

$$f'(x) = \frac{(6x + 2)(1 - 2x) - (-2)(3x^2 + 2x - 1)}{(1 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x - 12x^2 + 2 - 4x + 6x^2 + 4x - 2}{(1 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 6x}{(1 - 2x)^2}$$



$x \in ]-\infty; 0]$  لـ  $(1-2x)^2 > 0$  و  $x^2 - 6x^2 + 6x$  لـ  $f'(x)$  إشارة

$$6x(-x+1) = 0 \text{ فـ } -6x^2 + 6x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ و } 1$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$6x(-x+1)$	-	0	0	-

$x$	$-\infty$	$0$
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$+\infty$	$-1$

Point am

لـ  $x \in ]0; +\infty[$  من أجل  $x$  : لـ

$$f(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2x - \frac{1}{(x+1)^2} \right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \text{ لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x - \frac{1}{(x+1)^2} \right) = -1$$

بما أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$

~~لـ~~ و

$$\left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2 - \left[ \frac{2(x+1) \times 1}{[(x+1)^2]^2} \right] \text{ و } 1$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$$

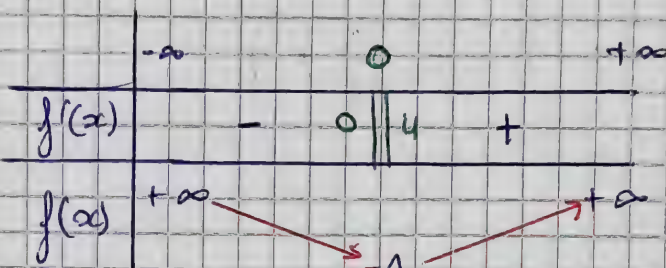
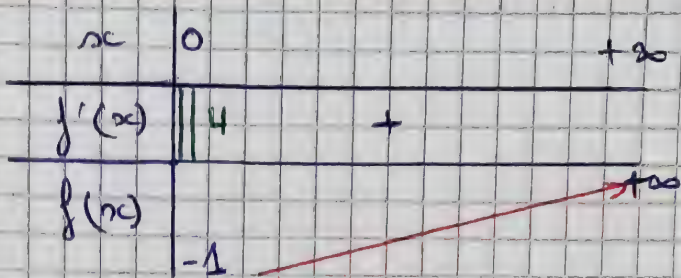
$$f'(x) = 2 + \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{(x+1)^3}$$

بما أن  $x \in ]0; +\infty[$  و  $f'(x) > 0$  (مجموع عددين موجبين)

أي  $f$  متزايدة تمامًا





④ تبين أن  $(C_f)$  يقل مقاربين مائليين

لدينا  $f(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0$

إذن المستقيم  $(D_1)$  الذي هو  $y = 2x$  له مقارب مائل  $(C_f)$  في  $+\infty$

ولدينا  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 1 \\ - 3x^2 + \frac{3}{2}x \\ \hline \frac{7}{2}x - 1 \\ - \frac{7}{2}x + \frac{7}{4} \\ \hline \frac{3}{4} \end{array}$	$\begin{array}{r} -2x + 1 \\ - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ \hline \end{array}$	لدينا
--	--	-------

إذن  $f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{-2x+1}$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}}{-2x+1} = 0 \quad \text{و هنا أن}$$

إذن المستقيم  $(D_2)$  الذي هو مماس لـ  $f$  عند  $-\infty$  هو  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$  مقارب مائل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{هنا أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{إذن حسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+2x-1}{1-2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x(1-2x)}$$

$$a = -\frac{3}{2} \quad \text{و هنا أن} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x) + \frac{3}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x^2+2x-1}{1-2x} + \frac{3}{2}x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(3x^2+2x-1) + 3x(1-2x)}{2(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2+4x-2+3x-6x^2}{2(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x-2}{2(1-2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x}{-4x}$$

$$b = -\frac{7}{4} \quad \text{و هنا أن} \quad = -\frac{7}{4}$$

إذن المستقيم  $(D_2)$  الذي هو مماس لـ  $f$  عند  $-\infty$  هو  $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$  مقارب مائل



5) تبين أن  $(f)$  يحقق  $(\alpha')$  في نقطتين فاصلهما

$$0 < \alpha_2 < 1 \quad \text{و} \quad \alpha_1 = -1$$

لدينا  $f(\alpha_1) = f(-1)$

$$= \frac{3(-1)^2 + 2(-1) - 1}{1 - 2(-1)}$$

$$= 0$$

نبين أن  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha_2$  حيث  $0 < \alpha_2 < 1$

من أجل  $x \in [0, 1]$  لدينا  $f(x) = 2x - \frac{1}{(x+1)^2}$

$f$  مستمرة  $[0, 1]$  لأن  $f$  مستمرة على  $]-\infty, -1[$  وعلى

$$]-1, +\infty[$$

$$f(1) \times f(0) < 0 \quad \begin{cases} f(1) = \frac{7}{4} \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$f$  متزايدة تماماً على  $[0, 1]$

إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة

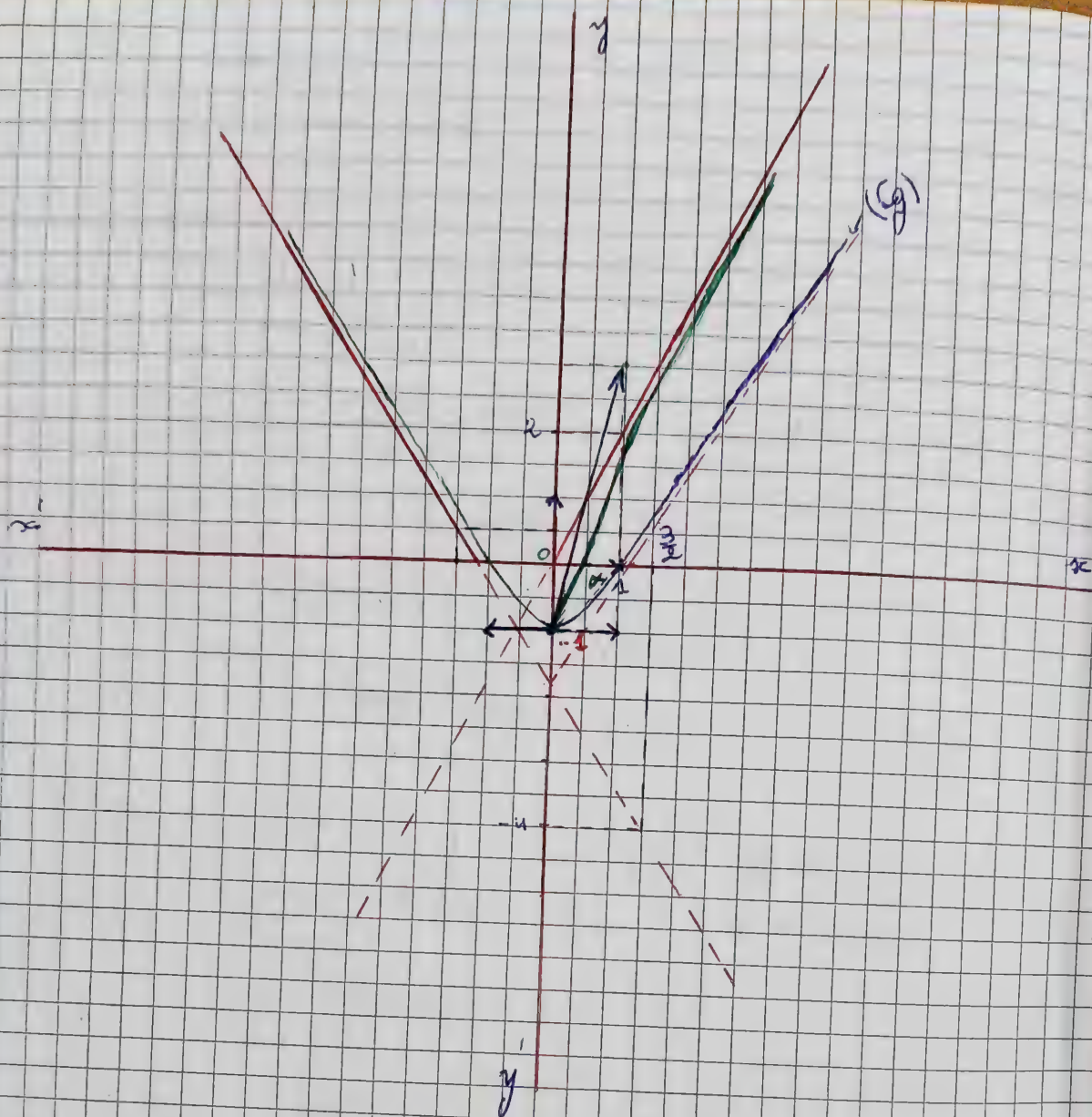
للمعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha_2$  حيث  $0 < \alpha_2 < 1$

(II)

تبين أن  $f$  متزايدة

$f$  متزايدة





$$g(x) = \frac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1} \quad (II)$$

١- تبیین آن  $g$  زوجیه

$g$  معرفه علی  $\mathbb{R}$  لان  $2|x| + 1 \neq 0$

لان  $|x| \geq 0$

$2|x| \geq 0$

$2|x| + 1 \geq 1$

عن اجل كل  $x \in D_f$

$(-x) \in D_f$

$f(-x) = f(x)$

معناه

$f$  زوجیه

$0 < \alpha_2$

$0 < \alpha_2$



متغير دالة زوجية في مجال متعامد ومتناهي (0, 1)  
 نثبت  $(y'y')$  متناظر

من أجل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا

$$g(-x) = \frac{3(-x)^2 - 2|-x| - 1}{2|-x| + 1}$$

$$\begin{aligned} & \text{لأن } |-x| = |x| \quad = \frac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1} \\ & = g(x) \end{aligned}$$

إذن  $g$  دالة زوجية

(نكتب  $g(x)$  بدون رمز القيمة المطلقة

$$g(x) = \frac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1} \quad \text{لدينا}$$

$$|x| \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{لأن } g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}; & x \geq 0 \\ \frac{3x^2 + 2x - 1}{-2x + 1}; & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}; & x \geq 0 \\ f(x); & x \leq 0 \end{cases}$$

(3) استنتاج  $(g)$

من أجل  $x \leq 0$  لدينا  $(g)$  يطبق على  $(f)$  وعكس  $g$  زوجية  
 إذن منحناها  $(g)$  متناظر بالسياسة  $(y'y')$



(4) مناقشة حسب قيم  $m$  إشارة وحلول المعادلة

$$3x^2 - 2m|x| - m = 0$$

المعادلة تكتب

$$3x^2 = 2m|x| + m$$

$$3x^2 = (2|x| + 1)m$$

$$\frac{3x^2}{2|x| + 1} = m$$

$$\frac{3x^2}{2|x| + 1} - 1 = m - 1$$

$$g(x) = m - 1$$

$$\begin{cases} y = g(x) \\ y = m - 1 = x \end{cases} \quad \text{أي}$$

حلل المعادلة المعطاة هي فواصل نقاط تقاطع (Cg)

مع المستقيم الذي معادلته  $y = m - 1$

إذا كان  $x < -1$  أي  $-1 < m - 1$  أي  $m < 0$  لا توجد حلول

إذا كان  $x = -1$  أي  $-1 = m - 1$  أي  $m = 0$  حل واحد هو 0

إذا كان  $x > -1$  أي  $m - 1 > -1$  أي  $m > 0$  حلان مختلفان في النطاق

التحريين (36)

بسط العبارات الآتية:

$$(e^x)^3 \times e^{-5x} \times \frac{1}{e^x} \quad (1)$$

$$\frac{e^{3x-1}}{e^{2x}} \quad (2)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \quad (3)$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

$$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$\text{لذا } (e^x)^3 \times e^{-5x} \times \frac{1}{e^x} = e^{3x} \times e^{-5x} \times e^{-x}$$

$$= e^{3x-5x-x}$$

$$= e^{-3x}$$

$$= \frac{1}{e^{3x}}$$



$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \text{ بـ } x$$

$$\frac{e^{3x-1}}{e^{2x}} = e^{3x-1-2x} = e^{x-1}$$

(2)

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} &= \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} \\ &= e^{x-2x} + e^{-x-2x} \\ &= e^{-x} + e^{-3x} \end{aligned}$$

(3) لـ بـ

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = (e^x + e^{-x}) \times \frac{1}{e^{2x}}$$

(2)

$$= (e^x + e^{-x}) \times e^{-2x}$$

$$= e^x \times e^{-2x} + e^{-x} \times e^{-2x}$$

$$= e^{-x} + e^{-3x}$$

(3) القرب

بينوا أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$\frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1}$$

(1)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

(2)

$$(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} + 2$$

(3)

$$\frac{e^x}{2 + e^x} = \frac{e^x}{e^x \left( \frac{2}{e^x} + 1 \right)}$$

لـ بـ

(3) لـ بـ

$$e^x \neq 0 \text{ و } e^x > 0 \text{ بـ } x = \frac{1}{2 \times \frac{1}{e^x} + 1}$$

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad \frac{1}{e^x} = e^{-x} \text{ بـ } x = \frac{1}{2e^{-x} + 1}$$



$$\frac{1}{e e^{-x} + 1} = \frac{1}{e x \frac{1}{e^x} + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{e + e^x}{e^x}}$$

$$= \frac{e^x}{e + e^x}$$

بنا 2

$$e^x \neq 0 \quad \text{بنا 3} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x (e^x - e^{-x})}{e^x (e^x + e^{-x})}$$

(2)

$$e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x} \quad \text{بنا 4} \quad = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$e^x \times e^x = e^{x+x} = e^{2x}$$

$$e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} \quad \text{(2)}$$

$$= \frac{\frac{(e^x)^2}{e^x} - \frac{1}{e^x}}{\frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$= \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + (e^{-x})^2 + 2 e^x e^{-x} \quad \text{بنا 5} \quad (3)$$

$$= e^{2x} + e^{-2x} + 2 \times 1$$

$$= e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} + 2$$

$$= \frac{(e^{2x})(e^{2x}) + 1}{e^{2x}} + 2$$

$$e^x \neq$$

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$



$$= \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} + 2$$

التمرين (36)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

(1) نحقق أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

(2) عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  بحيث من أجل كل  $x$

$$f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(a) \text{ اثبات أن } f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$$

من أجل  $x \in \mathbb{R}$  لدينا :

$$x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} + \frac{2}{e^x + 1}$$

$$= x - \left( \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= f(x)$$

(c) نعين  $a, b, c$

$$f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ لدينا}$$

$$= ax + \frac{b(e^x + 1) + ce^x}{e^x + 1}$$

$$= ax + \frac{be^x + b + ce^x}{e^x + 1}$$



$$x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = ax + \frac{(b+c)e^x + b}{e^x + 1}$$

$$x + \frac{-e^x + 1}{e^x + 1} = ax + \frac{(b+c)e^x + b}{e^x + 1}$$

و بالمطابقة نجد

$$\left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{array} \right\} \text{ أو } \left\{ \begin{array}{l} a=1 \\ b+c=-1 \\ b=1 \end{array} \right.$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

التمرين (39):

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

$$e^{2x} = 1 \quad (1)$$

$$e^{-5x} = \frac{1}{e} \quad (2)$$

$$e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \quad (3)$$

$$e^{x+3} = e^{\frac{4}{x}} \quad (4)$$

$$e^{2x} = 1 \text{ معرفة على } \mathbb{R} \quad (1)$$

ونكتب

$$e^0 = 1 \text{ لأن } e^{2x} = e^0$$

$$2x = 0 \text{ أي}$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

$$e^{-5x} = \frac{1}{e} \text{ معرفة على } \mathbb{R} \quad (2)$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ لأن } e^{-5x} = e^{-1}$$

$$-5x = -1 \text{ أي}$$

$$x = \frac{1}{5} \text{ أي}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

$$x = y \text{ معاد } e^x = e^y$$

$$a = \ln b \text{ معاد } e^a = b$$

$$2x = \ln 1 \quad (1)$$

$$\ln 1 = 0 \text{ لأن}$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$



$$(3) \quad \mathbb{R} \text{ موقفة على } e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0$$

$$e^{2x+1} = e^{3x} \quad \text{ونكتب}$$

$$2x+1 = 3x \quad \text{أي}$$

$$1 = 3x - 2x$$

$$1 = x$$

$$S_3 = \{1\} \quad \text{ومنه}$$

$$(4) \quad x \neq 0 \quad \mathbb{R} \text{ موقفة من أجل } e^{x+3} = \frac{4}{e^x}$$

$$(x \in \mathbb{R}^*) \quad \text{أي}$$

$$x+3 = \frac{4}{x} \quad \text{ونكتب}$$

$$x(x+3) = 4 \quad \text{أي}$$

$$x^2 + 3x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases} \quad (\text{حل ظاهر})$$

$$S_4 = \{1, -4\} \quad \text{ومنه}$$

التمرين (40)

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات التالية

$$(1) \quad 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$$

$$(2) \quad e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$$

$$(3) \quad e^{3x} + 3e^{2x} - e^x - 3 = 0$$

$$(4) \quad \mathbb{R} \text{ موقفة على } 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$$

$$2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0 \quad \text{ونكتب}$$

$$\begin{cases} e^x = t \\ 2t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$



حل المتادلة (\*)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4(2)(2)$$

$$= 9$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2(2)} = 2$$

ومنه

$$t_2 = \frac{5-3}{2(2)} = \frac{2}{2(2)} = \frac{1}{2}$$

توجد حالتان

1. من أجل  $t_1 = 2$  لدينا  $e^x = 2$

$$x = \ln 2$$

$$e^x = \frac{1}{2}$$

$$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

2. من أجل  $t_2 = \frac{1}{2}$  لدينا

أي

ومنه  $S_1 = \left\{ \ln 2; \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$

$$e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \text{ معرفة على } \mathbb{R}$$

ونكتب

$$e^x + 2 \times \frac{1}{e^x} - 3 = 0$$

$$\frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{2}{e^x} - \frac{3e^x}{e^x} = 0$$

$$(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} e^x = y \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \text{ (حل ظاهر)} \\ y_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \text{ معناه } y^2 - 3y + 2 = 0$$

توجد حالتان

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

2. من أجل  $y_1 = 1$



$$e^x = 2$$

$$y = 2$$

من أجل

$$x = \ln 2$$

أي

$$S_2 = \{0, \ln 2\}$$

ومنه

$$e^{3x} + 3e^{2x} - e^x - 3 = 0 \quad (3)$$

$$(e^x)^3 + 3(e^x)^2 - e^x - 3 = 0 \text{ ونكتب}$$

$$\begin{cases} e^x = X \\ X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0 \end{cases} \text{ أي}$$

$$X^3 + 3X^2 - X - 3 = 0$$

$$X^2(X+3) - (X+3) = 0$$

$$(X+3)(X^2-1) = 0$$

$$\begin{cases} X+3=0 \\ X^2-1=0 \end{cases} \text{ أو}$$

$$\begin{cases} X = -3 \\ X = 1 \\ X = -1 \end{cases}$$

$$e^x = -3$$

$$X = -3 \text{ من أجل}$$

$\mathbb{R}$  مستحيلة في

$$-3 < 0 \text{ و } e^x > 0 \text{ لأن}$$

$$e^x = 1$$

$$X = 1 \text{ من أجل}$$

$$x = 0$$

أي

$$e^x = -1$$

$$X = -1 \text{ من أجل}$$

$\mathbb{R}$  مستحيلة في

$$-1 < 0 \text{ و } e^x > 0 \text{ لأن}$$

$$S_3 = \{0\}$$

ومنه



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$$

المسألة (2.1)

الحساب

ع-2. ت. من الشكل  $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

ب'ج

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})$$

$$= \sqrt{1 + \sin 0} - \sqrt{1 - \sin 0}$$

$$\sin 0 = 0 \quad \text{ب'ج}$$

$$= \sqrt{1} - \sqrt{1}$$

$$= 0$$

$$\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \frac{(\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x})(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \frac{(\sqrt{1 + \sin x})^2 - (\sqrt{1 - \sin x})^2}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \frac{2 \sin x}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

ع-3. ج

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{2}{(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})}$$

$$= 1 \times \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$



المقرر (42)

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$$

(أ) أحسب  $f(-1)$  و  $f(-3)$

(ب) استنتج تحليل الحيات  $f(x)$

(ج) أ- حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$

ب- استنتج حلول المعادلة

$$e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$$

لدينا  $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 29(-1) - 24$

$$f(-1) = -1 - 4 + 29 - 24$$

$$f(-1) = 0 \quad \text{أي}$$

أ)  $f(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 - 29(-3) - 24$

$$= -27 - 36 - 87 - 24$$

$$f(-3) = 0 \quad \text{أي}$$

(ب) استنتج تحليل  $f(x)$

حيث أن  $f(-1) = 0$  و  $f(-3) = 0$  إذن

$f(x)$  لها جذرا  $(-1)$  و  $(-3)$  أي يوجد لموجود  $f(x)$

حيث  $f(x) = (x+1)(x+3) \times g(x)$

إذا كان  $P(x)$  يقبل القسمة على  $(x-a)$

و  $(x-b)$  (حيث  $a \neq b$ )

فإن:  $P(x)$  يقبل القسمة

على  $(x-a)(x-b)$



حل: نكتب  $f(x)$  باستعمال القسمة الإقليدية

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3) \times Q(x) \quad \text{الآن}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 - 29x - 24 & x^2 + 4x + 3 \\ -x^3 - 4x^2 - 3x & \\ \hline -8x^2 - 32x - 24 & \\ +8x^2 + 32x + 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x+3)(x-8) \quad \text{ومنه}$$

$$f(x) = (x+1)(x+3) \times Q(x) \quad 20$$

بما أن درجة  $f(x)$  هي 3

و درجة  $(x+1)(x+3)$  هي 2

اذن درجة  $Q(x)$  هي 1

$$f(x) = (x+1)(x+3)(x+b) \quad \text{أي}$$

$$3b = -24 \quad \text{بعد المطابقة نجد}$$

$$b = \frac{-24}{3} = -8$$

$$b = -8$$

ومنه:

$$f(x) = (x+1)(x+3)(x-8)$$

$$f(x) = 0$$

في  $\mathbb{R}$  المعادلة

$$(x+1)(x+3)(x-8) = 0$$

$$f(x) = 0 \quad \text{معناه}$$

لدينا

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{أي} \\ \text{أو} \\ \text{أو} \end{matrix}$$

$$S = \{-1, -3, 8\}$$

ومنه



$$e^{2x} - 4e^x - 29 - 2ue^{-x} = 0 \quad \text{ب) استنتاج حلول}$$

المعادلة معرفة على  $\mathbb{R}$  وتكتب

$$e^{2x} - 4e^x - 29 - 2u \times \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\text{أي} \quad e^{3x} - 4e^x - 29e^x - 2u = 0 \quad \text{من الطرفين}$$

في  $e^x$  (لأن  $e^x \neq 0$ )

$$(e^x)^3 - 4(e^x)^2 - 29e^x - 2u = 0$$

$$\text{أي} \quad \begin{cases} e^x = x & ; \quad x > 0 \\ x^3 - 4x^2 - 29x - 2u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x = x \\ x_1 = -1 & \text{(مرفوض)} \\ x_2 = -3 & \text{(مرفوض)} \\ x_3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{من أجل} \quad x_3 = 8 \quad \text{لدينا:} \quad e^x = 8$$

$$x = \ln 8 \quad \text{أي}$$

$$S_2 = \{ \ln 8 \}$$

المعبر (43)

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $e^{3x+1} - 2\sqrt{e^{4x+2}} + e^{x+1} = 0$

$$e^{3x+1} - 2\sqrt{e^{4x+2}} + e^{x+1} = 0$$

المعادلة معرفة على  $\mathbb{R}$  لأن  $e^{4x+2} > 0$  وتكتب

$$e^{3x+1} - 2\sqrt{e^{(2x+1)^2}} + e^{x+1} = 0$$

$$e^{3x+1} - 2\sqrt{e^{2x+1}} + e^{x+1} = 0$$

$$e^{3x+1} - 2e^{2x+1} + e^{x+1} = 0$$



بعد الإزالة على  $e$

$$e^{3x} \times e^1 - 2e^{2x} \times e^1 + e^x \times e = 0$$

$$e^{3x} - 2e^{2x} + e^x = 0$$

$$e^x(e^{2x} - 2e^x + 1) = 0$$

$$e^x \neq 0 \quad \text{أذن} \quad e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0$$

$$(e^x - 1)^2 = 0$$

$$e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

التمرين (44)

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات الآتية:

$$e^{2x} < 1 \quad (1)$$

$$e^{2x^2} \leq e^{5x-3} \quad (2)$$

$$e^{x^2} > (e^3)^4 \times e^{-x} \quad (3)$$

$$x < y \quad \text{معناه} \quad e^x < e^y$$

$$x < \ln b \quad \text{معناه} \quad e^x < b$$

$$b > 0$$

$$e^{2x} < 1 \quad \text{معروفة على } \mathbb{R}$$

$$e^{2x} < e^0 \quad \text{أي} \quad 2x < 0$$

$$x < 0$$

$$S_1 = ]-\infty; 0[ \quad \text{ومنه}$$

$$e^{2x} < 1 \quad \text{معناه} \quad 2x < \ln 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\text{أي} \quad 2x < 0$$

$$S_1 = ]-\infty; 0[$$

$$\text{أي} \quad x < 0$$



منه

الشرط

(1)

(2)

(3)

(1)

ندرس

ومن

$x < 0$

$x > 0$

$$e^{2x^2} < e^{5x-3} \quad (2)$$

معرفه على IR وتكتب

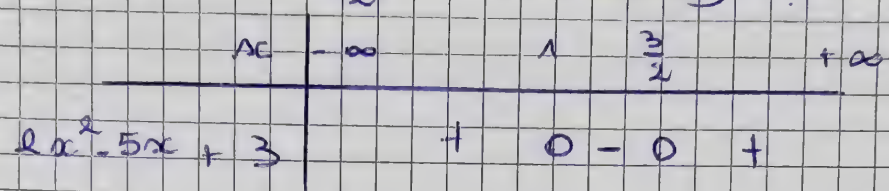
$$2x^2 < 5x - 3$$

$$2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \quad \text{أي}$$

$$2x^2 - 5x + 3$$

ندرس الإشارة

جذراه هما 1 و 3/2



$$(e^u)' = u' \times e^u$$

$$S_2 = \left[ 1; \frac{3}{2} \right] \quad \text{ومنه}$$

$$e^{x^2} > (e^3)^u \times e^{-x} \quad (3) \quad \text{معرفه على IR}$$

$$e^{x^2} > e^{12} \times e^{-x} \quad \text{وتكتب}$$

$$e^{x^2} > e^{12-x} \quad \text{أي}$$

$$x^2 > 12 - x \quad \text{أي}$$

$$x^2 + x - 12 > 0 \quad \text{أي}$$

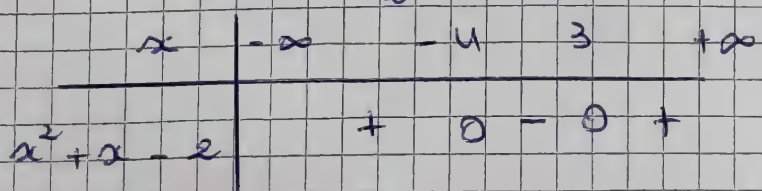
$$x^2 + x - 12 \quad \text{ندرس الإشارة}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1)^2 - 4(1)(-12)$$

$$= 49$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{-1 - 7}{2} = -4 \end{cases} \quad \text{ومنه}$$





$$S_1 = ] -\infty, -4[ \cup ] 3, +\infty [$$

ومنه

(45)

الشرط

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 < 0$$

(1)

$$\frac{e^x - 4}{e^x - 2} < e^x$$

(2)

$$(2 - e^x)(e^x - 4) > 0$$

(3)

$$\mathbb{R} \text{ مرفوعة } 2e^{2x} - 5e^x + 2 < 0$$

(1)

$$2(e^x)^2 - 5e^x + 2 < 0 \quad \text{ونكتب}$$

$$\begin{cases} e^x = t \\ 2t^2 - 5t + 2 < 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$2t^2 - 5t + 2$$

ندرس إشارة

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5+3}{2(2)} = 2 \\ t_2 = \frac{5-3}{2(2)} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$t$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2t^2 - 5t + 2$	+	0	-	0	+

$$\frac{1}{2} < t < 2$$

$$\text{هنا } 2t^2 - 5t + 2 < 0$$

$$\frac{1}{2} < e^x < 2$$

$$\text{هنا } 2(e^x)^2 - 5e^x + 2 < 0$$

$$\ln \frac{1}{2} < x < \ln 2 \quad \text{أي}$$

$$S_1 = ] \ln(\frac{1}{2}), \ln 2[ \quad \text{ومنه}$$



$$e^x - 2 \neq 0 \quad \text{معرفة من أجل أي } x \quad \frac{e^x - 4}{e^x - 2} \leq e^x \quad (2)$$

$$e^x \neq 2$$

$$x \neq \ln 2$$

$$x \in \mathbb{R} - \{\ln 2\} \quad \text{أو}$$

من أجل  $x \neq \ln 2$  المقترحة إثبات:

$$\frac{e^x - 4}{e^x - 2} - e^x \leq 0$$

$$\frac{e^x - 4}{e^x - 2} - \frac{e^x(e^x - 2)}{e^x - 2} \leq 0$$

$$\frac{e^x - 4 - e^x(e^x - 2)}{e^x - 2} \leq 0$$

$$\frac{e^x - 4 - (e^x)^2 + 2e^x}{e^x - 2} \leq 0$$

$$\frac{-(e^x)^2 + 3e^x - 4}{e^x - 2} \leq 0$$

$$\frac{-(e^x)^2 + 3e^x - 4}{e^x - 2} \quad \text{لنضرب الإشارة}$$

$$e^x < 2 \quad \text{أي } e^x - 2 < 0$$

$$x < \ln 2$$

$$-(e^x)^2 + 3e^x - 4 = -t^2 + 3t - 4 \quad \text{بالتعويض}$$

$$e^x = t$$

$$\Delta = (3)^2 - 4(-1)(-4)$$

$$\Delta = 9 - 16$$

$$\Delta = -7$$

$$\Delta < 0 \quad \text{أي}$$

$$-t^2 + 3t - 4 < 0 \quad \text{دائمًا}$$

$$-(e^x)^2 + 3e^x - 4 < 0 \quad \text{أي}$$



$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 2$	-	0	+
$-(e^x)^2 + 3e^x - 4$	-	-	-
$-(e^x)^2 + 3e^x - 4$	+	-	-
$e^x - 2$			

ومن هنا

$$S_2 = ] \ln 2 ; +\infty [$$

(ج) نحل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $(2 - e^x)(e^x - 4) > 0$

المتراجحة معروفة على  $\mathbb{R}$

$$(2 - e^x)(e^x - 4) > 0$$

$$e^x = 2 \text{ يعني } 2 - e^x = 0 \quad (*)$$

$$x = \ln 2$$

$$2 > e^x \text{ معناه } 2 - e^x > 0$$

$$\ln 2 > x$$

$$e^{-x} = 4 \text{ معناه } e^{-x} - 4 = 0 \quad (o)$$

$$-x = \ln 4$$

$$x = -\ln 4$$

$$e^{-x} > 4 \text{ معناه } e^{-x} - 4 > 0$$

$$-x > \ln 4$$

$$x < -\ln 4$$

$x$	$-\infty$	$-\ln 4$	$\ln 2$	$+\infty$
$2 - e^x$	+	+	0	-
$e^{-x} - 4$	+	0	-	-
$(2 - e^x)(e^{-x} - 4)$	+	0	-	+

$$S_3 = ] -\infty ; -\ln 4 [ \cup ] \ln 2 ; +\infty [$$

ومن هنا



# المشتق (4C)

احسب  $f'(x)$  في كل حالة من الحالات الآتية:

(3)

$$(e^u)' = u' \times e^u$$

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 2}$$

(1)

$$f(x) = (x-2)e^{-x+3}$$

(2)

$$f(x) = (e^x - 3)^2$$

(3)

$$f(x) = \sqrt{e^x - 2}$$

(4)

$$f(x) = e^{\frac{e^x - 1}{x - 3}}$$

(5)

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 2}$$

(1)

لدينا  $D_f = \mathbb{R}$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{3e^x(e^x + 2) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x [3(e^x + 2) - (3e^x - 1)]}{(e^x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (3e^x + 6 - 3e^x + 1)}{(e^x + 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7e^x}{(e^x + 2)^2}$$

$$f(x) = (x-2)e^{-x+3}$$

(2)

$D_f = \mathbb{R}$

$f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad f'(x) = 1 \times e^{-x+3} + (-1)e^{-x+3} \times (x-2)$$

$$f'(x) = [1 + (-1)(x-2)]e^{-x+3}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$v \neq 0$

منه:



$$f'(x) = (-x+3) e^{-x+3}$$

$$f(x) = (e^x - 3)^2$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

(3)

$$(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$$

نقل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2(e^x - 3)^{2-1} \times e^x$$

$$f'(x) = 2(e^x - 3) e^x$$

$$f(x) = \sqrt{e^x - 2}$$

(4)

$$e^x - 2 \geq 0$$

$$e^x \geq 2$$

$$x \geq \ln 2$$

ف معرفة من أجل

$$D_f = [\ln 2; +\infty[$$

أي

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$[\ln 2; +\infty[$$

ف نقل الاشتقاق على

$$u > 0$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 2}}$$

ولدينا:

$$f(x) = e^{x-3}$$

(5) لدينا:

ف معرفة من أجل  $x-3 \neq 0$  أي  $x \neq 3$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

أي

ف نقل الاشتقاق على كل من المجالين

$$]-\infty, 3[ \text{ و } ]3, +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{e^{(x-3)-1} (2x-1)}{(x-3)^2} \times e^{\frac{2x-1}{x-3}}$$

أي

$$f'(x) = \frac{2x-6-2x+1}{(x-3)^2} \times e^{\frac{2x-1}{x-3}}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2} \times e^{\frac{2x-1}{x-3}}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0; 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x e^x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0; 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

التدريب (48)

احسب النهايات الآتية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x) = -\infty \quad (1) \text{ لـ } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 - \frac{e^x}{x} \right] \quad (2) \text{ لـ } \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{لـ } \infty = -\infty$$



2b

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left( \frac{x}{e^x} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{و } x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و } x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

(3) لدينا

(4) لدينا

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{\infty} \text{ } \text{و } x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 2}{e^x + 4} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (3 - \frac{2}{e^x})}{e^x (1 + \frac{4}{e^x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{4}{e^x}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و } x = 3$$

الحزب (4)

احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x^2 + 3x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} \quad (4)$$

$$\frac{0}{0} \text{ } \text{و } x = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(2x + 3)}$$

(1) لدينا

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{2x + 3} \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



2)  $\frac{0}{0}$  "ت من الشكل"  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$  ليا (2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \times \frac{1}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ "ت" } = 1 \times 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 = 1$$

3) ليا (3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{3} \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4) ليا (4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} &= 1 \text{ "ت" } = 1 \times 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^3 - 1}{x}$$

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^3 - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + e^x + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times [e^{2x} + e^x + 1] \\ &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

5)  $\frac{0}{0}$  "ت من الشكل"  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$  ليا (4)

طريقة (1)  $x = 2 + t$  أي  $x - 2 = t$   $t \rightarrow 0$  فإن  $x \rightarrow 2$



$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^0}{t - 0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - e^0}{t - 0}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t \times e^t - e^0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(e^t - 1) e^t}{t} \\ &= 1 \times e^2 \\ &= e^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{بشكل مباشر}$$

طريقة باستخدام تعريف المشتق

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= f'(2) \\ &= e^2 \end{aligned}$$

المسألة (49)

1 حسب النهاية صفر لا نهائي

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot e^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \times \frac{1}{e^x - x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{بشكل مباشر}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{x}{e^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{ist } = 1$$

$$= 0 \times \infty \quad \text{ist } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$x = n \cdot t$  (für reellwertige  $t$ )

$$x = 2t$$

für

$$t \rightarrow -\infty \quad \text{ist } x \rightarrow -\infty \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{t \rightarrow -\infty} (2t)^2 e^{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} 4t^2 (e^t)^2$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} 4 (t \cdot e^t)^2$$

$$= 0$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \quad \text{ist } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

(4)

$$x = 2t$$

für

$$t \rightarrow +\infty \quad \text{ist } x \rightarrow +\infty \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t}}{(2t)^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{2t}}{4t^2}$$



$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left( \frac{et}{4} \right)^2$$

$$= +\infty$$

التمرين 50

(I)  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  :  $g(x) = e^x + x + 1$

الدراسة نخرات  $g$  :

$$D_g = ]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ و } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$$

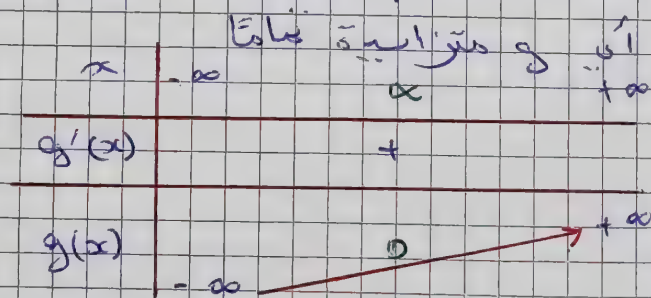
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ و } x \rightarrow +\infty$$

(II)  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (مجموع، التفاضل)

$$g'(x) = e^x + 1$$

نلاحظ أن  $g'(x) > 0$  (لأن  $e^x > 0$  و  $1 > 0$ )



(III) نبيان أن  $g(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $x$  حيث  $-1,28 < x < -1,27$

نأخذ  $g$  مستمرة ومتزايدة تمامًا على  $[-1,28; -1,27]$

$$g(-1,28) \times g(-1,27) < 0 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} g(-1,28) = e^{-1,28} - 1,28 + 1 = -1,96 \\ g(-1,27) = e^{-1,27} - 1,27 + 1 = 0,01 \end{cases}$$

وذلك حسب مبرهنة القيمة المتوسطة للمعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حلًا وحيدًا  $x$  حيث  $-1,28 < x < -1,27$



### (3) استنتاج إشارة $g(x)$

$x$	$-\infty$	$x$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = x - (x+2)e^{-x}$

$f$  نحل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا :

$$f'(x) = 1 - [1 \times e^{-x} + (-1) e^{-x} (x+2)]$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + e^{-x} (x+2)$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + e^{-x} x + 2e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} \cdot x + e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = e^{-x} \left[ x + 1 + \frac{1}{e^{-x}} \right]$$

$$f'(x) = e^{-x} [x + 1 + e^x]$$

$$f'(x) = e^{-x} \times g(x) \text{ حيث } g(x) = x + 1 + e^x$$

### (2) دراسة تغيرات $f$

$$D_f = ]-\infty; +\infty[ \quad (1)$$

$$\text{"}\infty - \infty\text{"} \rightarrow \text{ع-ع} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - (x+2)e^{-x}] \quad (2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) \left[ \frac{x}{x+2} - e^{-x} \right]$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty \quad \text{و} \quad = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x}) = -\infty$$

لا



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x+2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$$

$e^x > 0$   $\forall x$   $g(x)$   $\rightarrow$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$   $f'(x)$   $\rightarrow$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$

$x$	$-\infty$	$x$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

$f'(x)$   $\rightarrow$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$

$f(x)$   $\rightarrow$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = x + \frac{x+2}{x+1}$$

3 بيان 1

$$f(x) = x - (x+2)e^{-x}$$

لنا

$$g(x) = 0 \quad \forall x$$

$$e^x + x + 1 = 0$$

$$e^x = -(x+1)$$

$$= x - (x+2) \cdot \frac{1}{e^x}$$

$$= x - (x+2) \cdot \frac{1}{-(x+1)}$$

$$f(x) = x + \frac{x+2}{x+1}$$

النتيجة  $\rightarrow$   $f(x) \rightarrow +\infty$



$$-1,27 < x < -1,28$$

$$-1,28 + 1 < x + 1 < -1,27 + 1$$

$$-0,28 < x + 1 < -0,27$$

$$-\frac{1}{0,27} < \frac{1}{x+1} < -\frac{1}{0,28}$$

$$\frac{1}{0,28} < -\frac{1}{x+1} < \frac{1}{0,27}$$

و من هنا نرى ان

$$-1,28 + 2 < x + 2 < -1,27 + 2$$

$$(2) \quad 0,72 < x + 2 < 0,73$$

من (1) و (2) نجد ان

$$\frac{0,72}{0,28} < \frac{x+2}{x+1} < \frac{0,73}{0,27}$$

$$2,57 < \frac{x+2}{x+1} < 2,70$$

$$-2,70 < \frac{x+2}{x+1} < -2,57$$

$$-1,28 < x < -1,27$$

$$-2,70 < \frac{x+2}{x+1} < -2,57$$

اذن نجد ان

$$-1,28 - 2,70 < x + \frac{x+2}{x+1} < -1,27 - 2,57$$

$$-3,98 < f(x) < -3,84$$

$$f(x) = x + \frac{x+2}{x+1}$$

ط (2) لدينا

$$f(x) = x + \frac{x+1+1}{x+1}$$

نكتب

$$f(x) = x + \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$



$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$-1,28 < x < -1,27$$

$$-0,28 < x+1 < -0,27$$

$$-\frac{1}{0,27} < \frac{1}{x+1} < -\frac{1}{0,28}$$

$$-0,28 + \frac{1}{-0,27} < x + 1 + \frac{1}{x+1} < -0,27 + \frac{1}{-0,28}$$

$$-3,98 < f(x) < -3,84$$

(4) مبياني أن (cf) يقبل نقطة انعطاف  $\Omega$  بطلب تعيينها

معرفة 1:  $f$  يقبل الاشتقاق  $\Omega$  (مرتين)

إذا كانت  $f$  تتغير من أجل  $x$  مع تغير  $x$  إشارتها

فإن (cf) يقبل نقطة انعطاف  $I(x_0; f(x_0))$

معرفة 2

$f$  تتغير من أجل  $x$  بدون تغير إشارتها

إذا كانت

فإن (cf) يقبل نقطة انعطاف  $I(x_0; f(x_0))$

نقطة انعطاف  $\Omega$  = un point d'inflection

حسب  $f''(x)$  ثم ندرس إشارتها

$$f'(x) = e^{-x} \times g(x) \quad \text{لدينا}$$

$$f''(x) = -1e^{-x} \times g(x) + g'(x) \times e^{-x} \quad \text{إذن}$$

$$f''(x) = [-g(x) + g'(x)] e^{-x}$$

$$f''(x) = [-e^{-x} - 1 + e^{-x} + 1] \times e^{-x}$$



$$f''(x) = -x \times e^{-x}$$

0.1

$$-x \times e^{-x} = 0 \quad f''(x) = 0 \quad \text{معناه}$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

$$e^x \neq 0 \text{ لأن } e^x > 0$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$		$0$	$-$
$f''(x) = -x e^{-x}$		$0$	$-$

بما أن  $f''$  تنعدم من أجل  $x_p = 0$  معبرة إشارة

فإن  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $\Omega(0, f(0))$

$$f(0) = 0 - (0+2)e^0 \quad \text{لأن } \Omega(0, -2) \quad \text{أي}$$

$$= -2 \times 1$$

$$= -2$$

كتابة معادلة المماس  $(T_1)$  عند  $\Omega$  لـ  $(C_f)$

$$\Omega(0, -2) \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$f'(x) = e^{-x} \times g(x) \quad \text{لأن } f'(0) = e^0 + g(0) \quad \text{بما أن}$$

$$= 1 \times (e^0 + 0 + 1)$$

$$= 1 \times (1 + 1)$$

$$= 2$$

$$T_1: y = 2x - 2$$

اذن

تبين أن  $y = x$  (A) مقارب مائل لـ  $(C_f)$  عند  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0 \quad \text{بمعنى } y = x \quad \text{(B) مقارب مائل لـ } (C_f) \text{ عند } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x+2)e^{-x} - x]$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(x+2)e^{-x}]$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{-x} \text{ لأن } = 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right)$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (-t \cdot e^t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0$$

$$-x = t \text{ نضع}$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ فإن } t \rightarrow -\infty$$

(7) . تبيان أنه توجد نقطة وحيدة من (Cf) يكون عند المماس

(T) موازيا لـ (Δ)

$$(Δ) : y = ax + b$$

a يسمى معامل توجيه أو ميل المستقيم (Δ)

معادلة المماس (T) عند نقطة فاصلتها  $x_0$  هي :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f'(x_0)$  معامل توجيه أو ميل المماس (T)

$$(Δ) : y = ax + b$$

$$(Δ') : y = a'x + b'$$

$$a = a' \text{ معناه } (Δ) \parallel (Δ')$$

$$a \times a' = -1 \text{ معناه } (Δ) \perp (Δ')$$

معامل توجيه  $(Δ) : y = x$  هو 1

معامل توجيه المماس (T) عند نقطة فاصلتها  $x_0$  هو  $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = 1 \text{ يعني } (Δ) \parallel (T)$$

$$f'(x) = e^{-x} \times g(x) \text{ لأن } e^{-x_0} \times g(x_0) = 1 \text{ أي}$$



$$\frac{1}{e^{x_0}} \times g(x_0) = 1$$

أي  $g(x_0) = e^{x_0}$  بعد ضرب الطرفين في  $e^{x_0}$

$$e^{x_0} + x_0 + 1 = e^{x_0}$$

$$x_0 + 1 = 0$$

ومن  $x_0 = -1$  و  $f(x_0) = f(-1)$

$$= -1 - (-1 + e) e^{-1}$$

$$= -1 - e$$

أي النقطة المطلوبة هي  $A(-1; -1 - e)$

كتابة معادلة  $(T_1)$

معادلة  $(T_2)$  هي

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$y = 1(x + 1) - 1 - e$$

ومن  $(T_2): y = x - e$

8) تبين أن  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  في  $[-2, 5]$

نما أن  $f$  مستمرة ومتناقصة تماماً على  $[-2, 5]$

(لأن  $[-2, 5]$  جزء من  $]-\infty, \alpha]$ )

$$f(-2,5) \times f(-2) < 0 \quad \text{أي} \quad \begin{cases} f(-2,5) = -2,5 - (-2,5+2)e^{-2,5} = 3,59 \\ f(-2) = -2 - (-2+2)e^{-2} = -2 \end{cases}$$

لأن  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  في  $[-2, 5]$

(حسب مبرهنة القيم المتوسطة)



(ب) حساباً

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (x+2)e^{-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{x} - \frac{x+2}{x} e^{-x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{x+2}{x} e^{-x} \right)$$

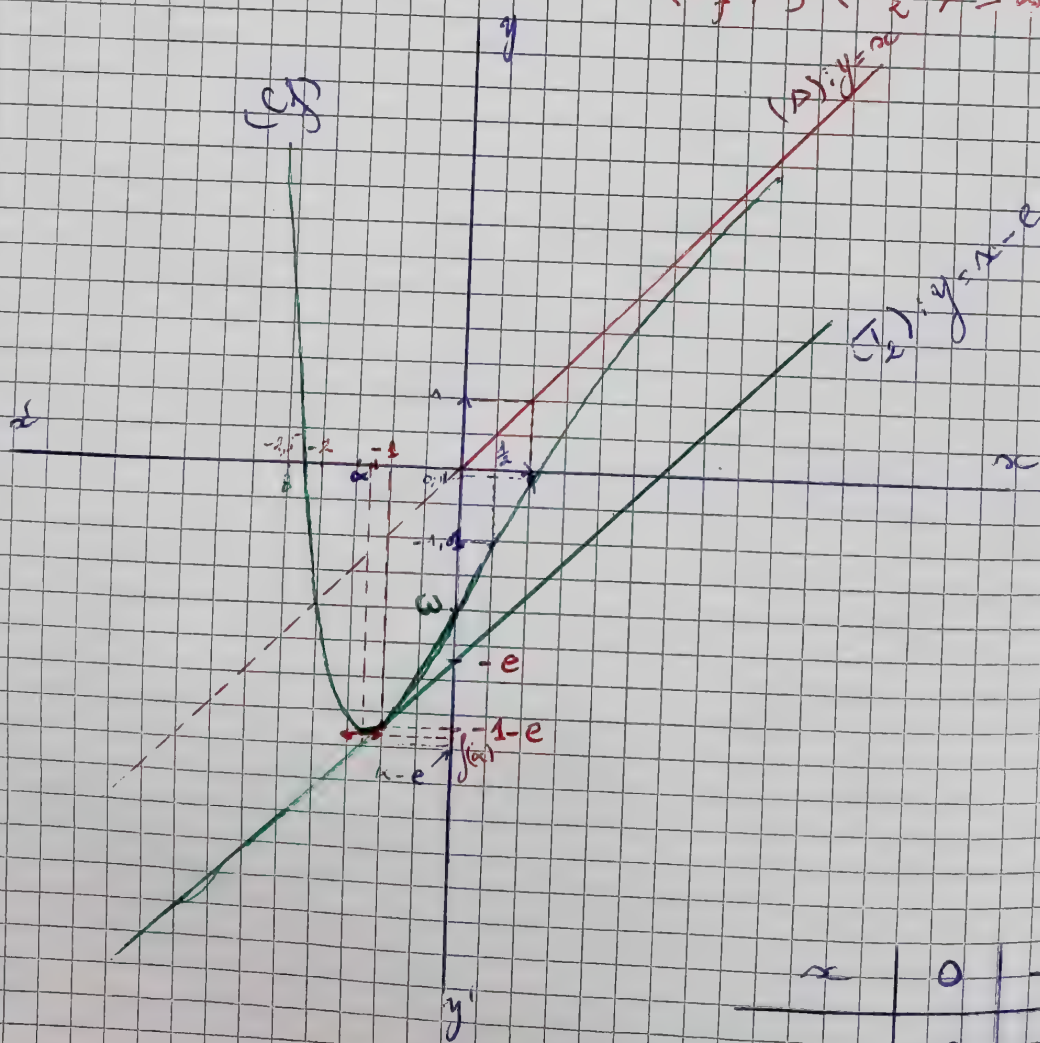
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \quad \text{و} \quad = -\infty$$

التفسير البياني للنتيجة

بما أن  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  إذن  $(C_f)$  له فرع قطع

مكافئ باتجاه  $(y', y)$

(2) استاء  $(T_1)$  و  $(C_f)$



$x$	$0$	$-1$
$(T_1): y = x - e$	$-e$	$-1 - e$



$x$	0	1
$y = x - e$	0	1

$$y = x - e$$

$$-1,28 < x < -1,27$$

$$-1,28 - e < x - e < -1,27 - e$$

$$-3,99 < x - e < -3,98$$

ومنه:

$$-3,99 < x - e < -3,98 < f(x) < -3,84$$

$$f(1) = 1 - (1+e)e^1 = 1 - 3e^1 \approx 0,10$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - (1+e)e^{\frac{1}{2}} = 1 - 3e^{\frac{1}{2}} \approx -0,1$$

(9) المناقشة بينا لعدد وإشارة حلول المعادلة

$$(x+e) + me^x = 0$$

المعادلة تكتب:

$$x+e = -me^x$$

أي:

$$e^x \neq 0 : \text{نضرب} \quad \frac{x+e}{e^x} = -m$$

أي:

$$-(x+e)e^x = m$$

أي:

$$x - (x+e)e^x = x + m$$

أي:

$$f(x) = x + m$$

$$y = f(x)$$

$$y = x + m$$

حلول المعادلة المعطاة هي قوائم نقاط تقاطع (Cf) مع المشتق



الذي يعادلته  $y = x + m$

- إذا كان  $m < -e$  لم يوجد حل
- إذا كان  $m = -e$  لدينا حل واحد سالب -1
- إذا كان  $-e < m < 0$  لدينا حلان
- إذا كان  $m = 0$  لدينا حلان  $\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$
- إذا كان  $m = -2$  لدينا حلان  $\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$
- إذا كان  $m > 0$  لم يوجد حل سالب

• إذا كان  $-e < m < 0$  لدينا مختلفان في الإشارة

• إذا كان  $m > 0$  لم يوجد سالب

التحري (5)

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

نبراه المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $I$  يطلب تحييدها

نبراه أن  $f$  دالة كثر حدودا <sup>نبراه إشارة</sup> إذن قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$6x + 6 = 0 \quad f''(x) = 0 \quad \text{معناه}$$

$$x = -1 \quad \text{أي}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f''(x) = 6x + 6$	-	0	+

مع أن  $f''$  تتغير من أجل  $x_0 = -1$

متغيرة إشارة

إذن  $f$  يقبل نقطة انعطاف

$$I(-1; f(-1)) \quad \text{أي} \quad I(-1; -2)$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4$$

$$f(-1) = -1 + 3 - 4 = -2$$

(5)



التحريك (3)

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  :

$$f(x) = (2x - 6)^3 + 2$$

أدرس اتجاه تغير  $f$

(2) ما إذا تستنتج بالنسبة لـ (Cp) صحن الدالة  $f$  ؟

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$   
حسب  $f'(x)$  ثم درسا إشارته

لدينا  $f'(x) = 3(2x - 6)^{3-1} \times 2 + 0$

أي :  $f'(x) = 6(2x - 6)^2$

$f'(x) = 0$  معناه  $6(2x - 6)^2 = 0$

أي :  $2x - 6 = 0$

أي :  $x = 3$

$x$	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x) = 6(2x - 6)^2$	+	0	+

بما أن  $f'(x) \geq 0$  إذن  $f$  متزايدة قاطبة على  $\mathbb{R}$

الاستنتاج

بما أن  $f$  تنعدم من أجل  $x_0 = 3$  بدون تغيير إشارة

إذن (Cp) يقبل نقطة انعطاف

أي  $I(3, f(3))$

$I(3, 2)$



في الحالة المعروفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

(1) ادرس تغيرات الدالة  $f$

(2) نريد ان المستقيم (الذي المماس له عند  $y=x$ ) مماسا لـ  $f$  عند  $x=0$

(3) ارسم تمثيلها البياني (Cf)

(1) دراسة تغيرات  $f$

$$D_f = ]-\infty; +\infty[$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{1}{e^x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

(2) لا تقبل الاستيفاق على  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - e^x \times x}{(e^x)^2}$$

ولدينا

$$f'(x) = \frac{e^x - e^x \times x}{(e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$$

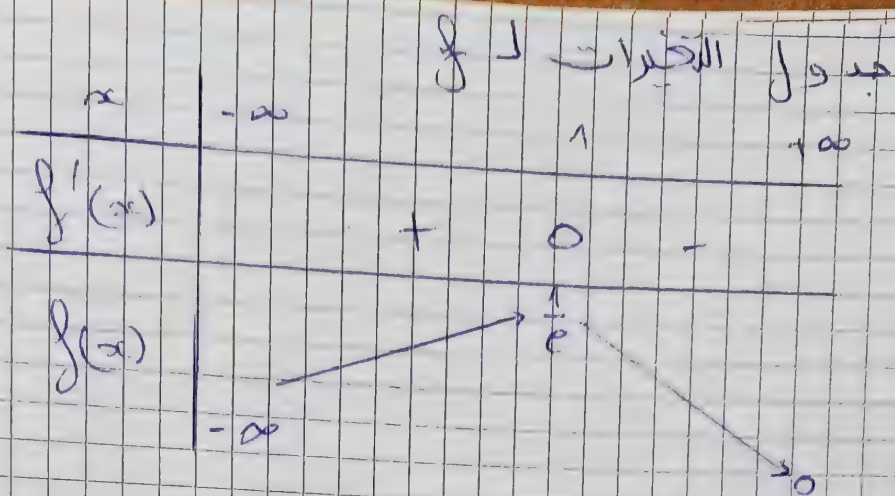
ومنه :  $e^x \neq 0$  لأن  $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

$e^x > 0$  لأن

$x$	$-\infty$	$1-x$	$1$	$+\infty$
$1-x$		+	0	-

لـ  $f'(x)$  له إشارة البسط





$$f(x) = \frac{1}{e^x}$$

(2) معادلة المماس عند  $x=0$ :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f(0) = \frac{1-0}{e^0} = 1 \text{ لأن}$$

$$y = 1(x-0) + 0$$

أي:

$$f(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(\Delta): y = x$$

ومنه

$$f(x) = x$$

(3)

$$\frac{x}{e^x} = x$$

نكافئ

$$x = x e^x$$

أي

$$x - x e^x = 0$$

$$x(1 - e^x) = 0$$

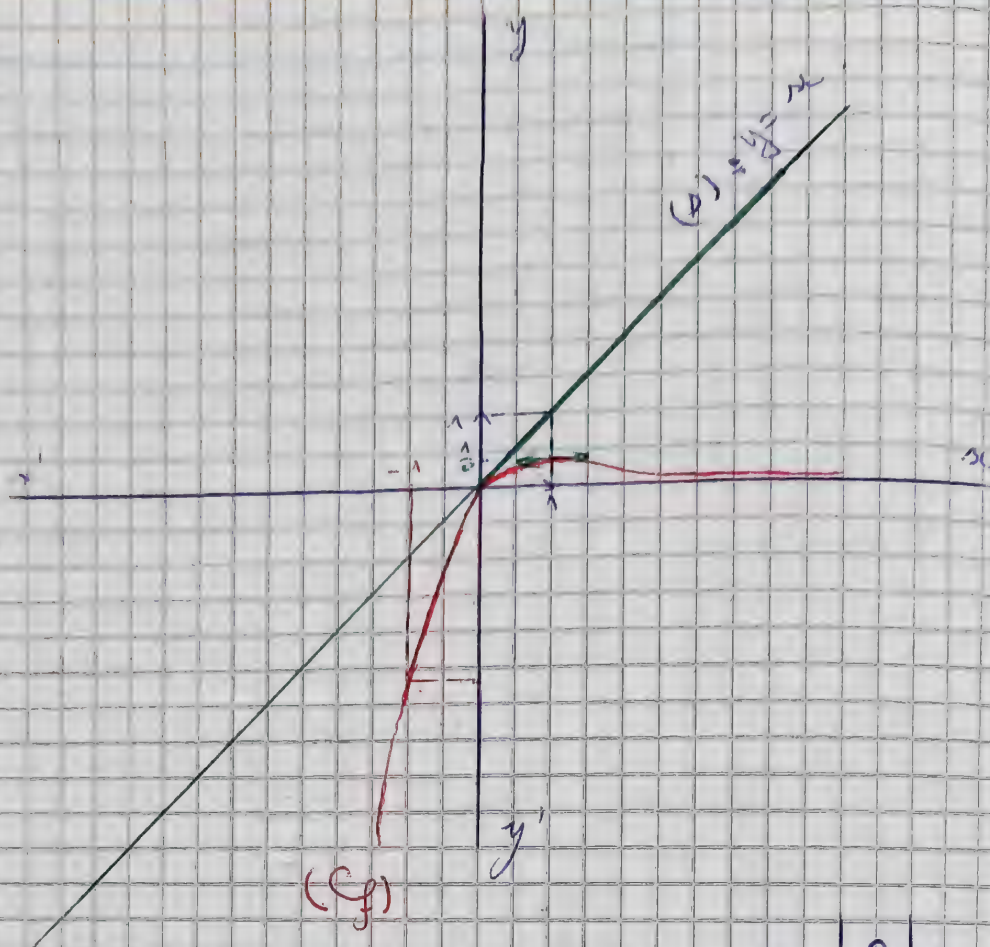
$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 - e^x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x=0$  هو الحل الوحيد (3) معالج (4) معالج





$x$	0	1
$y = x$	0	1

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  إذن المستقيم الذي يماس له  $f = 0$  يقارب  $(y')$  منطبق على  $x' = x$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  إذن نحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x}$$

$= +\infty$  أي يوجد فرع مكافئ باتجاه  $(y', y)$

$$f(1) = \frac{1}{e} \approx 0,36$$



مركز تناظر

$W(\alpha, \beta)$  مركز تناظر لـ  $(f)$  معنى الدالة  $f$

معناه

$x \in D_f$

من أجل كل

$$(2\alpha - x) \in D_f$$

$$f(2\alpha - x) + f(x) = e^9 \beta$$

المسألة (54)

$\mathbb{R}^*$

الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$\mathbb{R}^*$

يبين أنه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) + f(x) = 6$$

استنتج أن  $(f)$  له مركز تناظر  $A$  يحدد تعبيرها

$x \in \mathbb{R}^*$  لدينا

من أجل

$$f(-x) + f(x) = \frac{4e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \frac{\frac{4}{e^x} - 2}{\frac{1}{e^x} - 1} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \frac{\frac{4 - 2e^x}{e^x}}{\frac{1 - e^x}{e^x}} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

$$= \frac{4 - 2e^x}{1 - e^x} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 - 2e^x}{-(e^x - 1)} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1} \\
 f(-x) + f(x) &= \frac{-(4 - 2e^x)}{e^x - 1} + \frac{4e^x - 2}{e^x - 1} \\
 &= \frac{-4 + 2e^x + 4e^x - 2}{e^x - 1} \\
 &= \frac{6e^x - 6}{e^x - 1} \\
 &= \frac{6(e^x - 1)}{e^x - 1} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

(2) لا يحتاج

$$f(-x) + f(x) = 6$$

ما أن

$$f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$$

وبنى المطابقة

$$\begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 6 \end{cases}$$

نجد

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3 \end{cases}$$

أي

ومنه  $(C_f)$  له مركز تناظر  $A(0, 3)$

ملاحظة:

نماز  $x \in \mathbb{R}^*$  لأن  $x \neq 0$

ومنه  $-x \neq 0$

أي  $(-x) \in \mathbb{R}^*$



التمرين (55)

في الدالة المعطاة على  $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$$

أثبت أن النقطة  $I(2, 3)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$  من الدالة  $f$

$I(2, 3)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$

معناه

من أجل  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$\begin{cases} (2(2) - x) \in \mathbb{R} - \{2\} \\ f(2(2) - x) + f(x) = 2(-3) = -6 \end{cases}$$

من إثبات أن  $(4-x) \in \mathbb{R} - \{2\}$

ليكن  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$  أي  $x \neq 2$

$$x \neq 2$$

$$4 - x \neq -2 + 4$$

$$4 - x \neq 2$$

أي

$(4-x) \in \mathbb{R} - \{2\}$  أي

من إثبات أن  $f(4-x) + f(x) = -6$

من أجل  $x \in \mathbb{R} - \{2\}$  لدينا

$$f(4-x) + f(x) = \frac{-3(4-x)+1}{4-x-2} + \frac{-3x+1}{x-2}$$

$$= \frac{-12+3x+1}{2-x} + \frac{-3x+1}{x-2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{3x-11}{-(x-2)} + \frac{-3x+1}{x-2} \\
 &= \frac{-(3x-11) - 3x+1}{x-2} \\
 &= \frac{-3x+11-3x+1}{x-2} \\
 &= \frac{-6x+12}{x-2} \\
 &= \frac{-6(x-2)}{x-2} \\
 &= -6
 \end{aligned}$$

الحرفي (36) (ثا/ زرواق الترتيب 11)

1 حل في  $\mathbb{R}^2$  الجملة

$$\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^{x+y} = 2 \end{cases}$$

2 حل في  $\mathbb{R}$  ، المتزاوجة

$$2e^{2x} - 3e^x > 2e^x - 2$$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (الحداث الديكارتي)

$$= \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}\}$$

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$$

حل المعادلة

$$e^x = t$$

المعادلة متكافئة

$$\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2)$$

$$= 25 - 16$$

$$= 9$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{5+3}{2(2)} = 2 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} t_2 = \frac{5-3}{2(2)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x = \ln 2 \text{ أي } e^x = 2$$

$$x = \ln \frac{1}{2} \text{ أي } e^x = \frac{1}{2}$$

من أجل  $t_1 = 2$

من أجل  $t_2 = \frac{1}{2}$

(\*)  $e^x \times e^y = 2$

$e^x = 2$

$e^{x+y} = 2$

(\*) من أجل  $x = \ln 2$  أي

$2e^y = 2$

$e^y = 1 = e^0$

$y = 0$

أي

(\*) من أجل  $x = \ln(\frac{1}{2})$  أي

$e^x = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \times e^y = 2$

$e^y = 4$

$y = \ln 4$

فإن (\*) تكتب

$S = \{ (\ln 2, 0); (\ln(\frac{1}{2}), \ln 4) \}$

$\mathbb{R} \quad 2e^{2x} - 3e^x > 2e^x - 2$  (2)

$2e^{2x} - 3e^x - 2e^x + 2 > 0$  وتكتب

$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$

$\begin{cases} e^x = t \\ 2t^2 - 5t + 2 > 0 \end{cases}$

$2t^2 - 5t + 2$

نرى إشارة

$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$
+	-	+	+

$\begin{cases} t < \frac{1}{2} \\ t > 2 \end{cases}$

أو  $2t^2 - 5t + 2 > 0$

ومنه



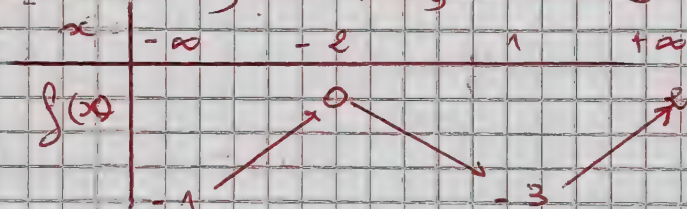
$$e^x < \frac{1}{x} \text{ أو } e^x > 2 \quad \text{أي} \quad 2(e^x)^2 - 5e^x + 2 > 0$$

$$\begin{cases} x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \text{أو} \\ x > \ln 2 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$S_1 = ]-\infty; \ln\left(\frac{1}{2}\right)[ \cup ]\ln 2; +\infty[$$

التمرين (57)  
الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  وجدول تغيراتها هو كالتالي:

تأكد من صحة أو خطأ العبارات التالية مع التبرير.



(1) من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f(x) \geq -3$

(2) على  $]1; +\infty[$  :  $f'(x) \leq 0$

(3) من الجدول نلاحظ  $f(0) \leq f(1)$

(4) المماس المماس للمنحنى الممثل للدالة  $f$  في النقطة التي حاصلاتها -

حوار في المستقيم الذي معادلته  $y = x$

(5) هل  $f'(3) > 0$  ؟

أدينا من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$   $f(x) \geq -3$  لأن -3 قيمة حدية

صغرى للدالة  $f$  على  $]-\infty; +\infty[$

أي الاقتراح صحيح.

(6) خطأ لأن  $f$  متزايدة تمامًا على  $]1; +\infty[$

(7)  $f(0) < f(1)$  خطأ

لأن  $0 < 1$  أي  $f(0) > f(1)$  لأن  $f$  متناقصه تمامًا



على  $[-2, 1]$

4) معامل توجيه المماس (T) (Df) عند النقطة ذات الفاصلة (5) هو  $f'(-2) = 0$  و معامل التوجيه المستقيم (Δ) الذي يعادل

$y = x$  هو 1

أب  $f'(-2) \neq 1$

ومن الاقتراح خاطئ

5) لدينا  $f'(3) > 0$  صحيح

لأن  $3 \in [1, +\infty[$

و في فترة تمامها على  $[1, +\infty[$

أي  $f'(x) > 0$  ومنه  $f'(3) > 0$

المعبر (58)

دالة عددية لتغير حقيقي  $x$  حيث

$$f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$$

1) أثبت تغيرات الدالة  $f$ .

$$D_f = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 1 + e^{2x} - e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \quad \text{لأن } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 1) = +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + e^{2x} - e^x)$$



$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[ -\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + e^x - 1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$= +\infty$$

ف (f) تقبل الحد المتناهي على  $\mathbb{R}$  ولها

$$f'(x) = -1 + 0 + 2e^{2x} - e^x$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$$

! إشارة  $f'(x)$

$$f'(x) = 0$$

$$2e^{2x} - e^x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} e^x = t \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

وهذه

$$2t^2 - t - 1 = 2(t-1)\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x) = 2(e^x)^2 - e^x - 1$$

$$= 2(e^x - 1)\left(e^x + \frac{1}{2}\right)$$

$$e^x + \frac{1}{2} > 0, \quad 2 > 0 \quad \text{و} \quad e^x - 1 \quad \text{! إشارة } f'(x)$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+

حول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$$f(0) = -0 + 1 + e^0 - e^0 = 1$$



ب) ادرس الفروع الثلاثة لها ثمة المعنى (C) و بين أنه يقبل مستقيماً  
مقارباً (A) يطلب تعيين معادلاته

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  إذن لدينا فرع لا نهائي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  إذن لا يتقاطع مع لا نهائي

بما أن  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - e^x) = 0 \end{array} \right.$  إذن (C)

يقبل مستقيماً مقارباً

(A) معادلاته  $y = -x + 1$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  إذن حسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + e^{2x} - e^x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \left[ -\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} + e^x - 1 \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

أي يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه  $y$

$$f(x) = -x + 1 + e^{2x} - e^x$$

ج) ادرس الوضع المعنى النسبي لـ (C) و (A)

نحسب الفرق  $f(x) - y$  ثم ندرس إشارته

$$f(x) - y = e^{2x} - e^x$$

$$e^x(e^x - 1) = 0 \quad \text{لدينا} \quad e^{2x} - e^x = 0$$

$$e^x > 0 \quad \text{أي} \quad e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$x > 0 \quad \text{أي} \quad e^x > 1 \quad \text{لدينا} \quad e^x - 1 > 0$$



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$e^x$		+	+
$e^x - 1$		-	+
$f(x) = y - (e^x - 1)$		-	+
وصفية	(د) حد	(د) حد	(د) حد
(Cp) بالحد	(د) حد	(د) حد	(د) حد
(د) حد	(د) حد	(د) حد	(د) حد

(د) حد (د) حد  
نقطة (0, 1)

ط (د) من أجل  $x=0$  لدينا:  $y = -x + 1$

$$y = -0 + 1$$

$$y = 1$$

ط (د) لدينا  $f(0) = -0 + 1 + e^0 - e^0$

$$f(0) = 1$$

(د) (أ)  $x$  عدد حقيقي نعتبر (د) المماس المنحني (Cp) في النقطة  
دات الفاصلة  $x$

(د) عينا  $x$  حتى يكون (د) موازيا (د)

عامل توجيه  $y = -x + 1$  (د) هو -1

عامل توجيه (د) هو  $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = -1 \quad \text{معناه} \quad (د) \parallel (د)$$

$$-1 + 2e^{2x_0} - e^{x_0} = -1 \quad \text{أي}$$

$$2e^{2x_0} - e^{x_0} = 0 \quad \text{أو}$$

$$e^{x_0}(2e^{x_0} - 1) = 0$$

$$e^{x_0} \neq 0 \quad \text{و} \quad 2e^{x_0} - 1 = 0$$

$$e^{x_0} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = \ln \frac{1}{2}$$

(د) الكسب عند  $x_0$  معادلة (د)



معادلة (د')

$f'(x_0) = -1$  لأن  $y = -1 \left( x - \ln \frac{1}{2} \right) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$

$y = -x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 + e^{2\ln(\frac{1}{2})} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$y = -x + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$

(د') :  $y = -x + \frac{3}{4}$  وحيد

$$\begin{aligned} e^{\ln a} &= a \\ a &> 0 \end{aligned}$$

(ب) بين أن المنحني (Cf) يقبل نقطة انعطاف I يطلب نفس  
أحد اثباتها

حسب  $f''(x)$  ثم ندرس إشارته  
لدينا  $f(x) = -1 + 2e^{2x} - e^x$

$f''(x) = 0 + 4e^{2x} - e^x$  إذن

$f'(x) = 4e^{2x} - e^x$  أي

$4e^{2x} - e^x = 0$   $f''(x) = 0$  وحيد

$e^x(4e^x - 1) = 0$  أي

$e^x \neq 0$  لأن  $4e^x - 1 = 0$  أي

$e^x = \frac{1}{4}$

$x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$  وحيد

$4e^x - 1 > 0$  لأن

أي  $x > \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$\ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$x$	$-\infty$	$\ln\left(\frac{1}{4}\right)$	$+\infty$
$e^x$		+	+
$4e^x - 1$	-	0	+
$f''(x) = e^x(4e^x - 1)$	-	0	+

بما أن  $f''$  يتغير من أجل  $x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$  من موجبة إلى سالبة، فإن

(Cf) يقبل نقطة انعطاف I أي  $I\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right); f\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)\right)$

$I\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right); \frac{13}{4} - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)$



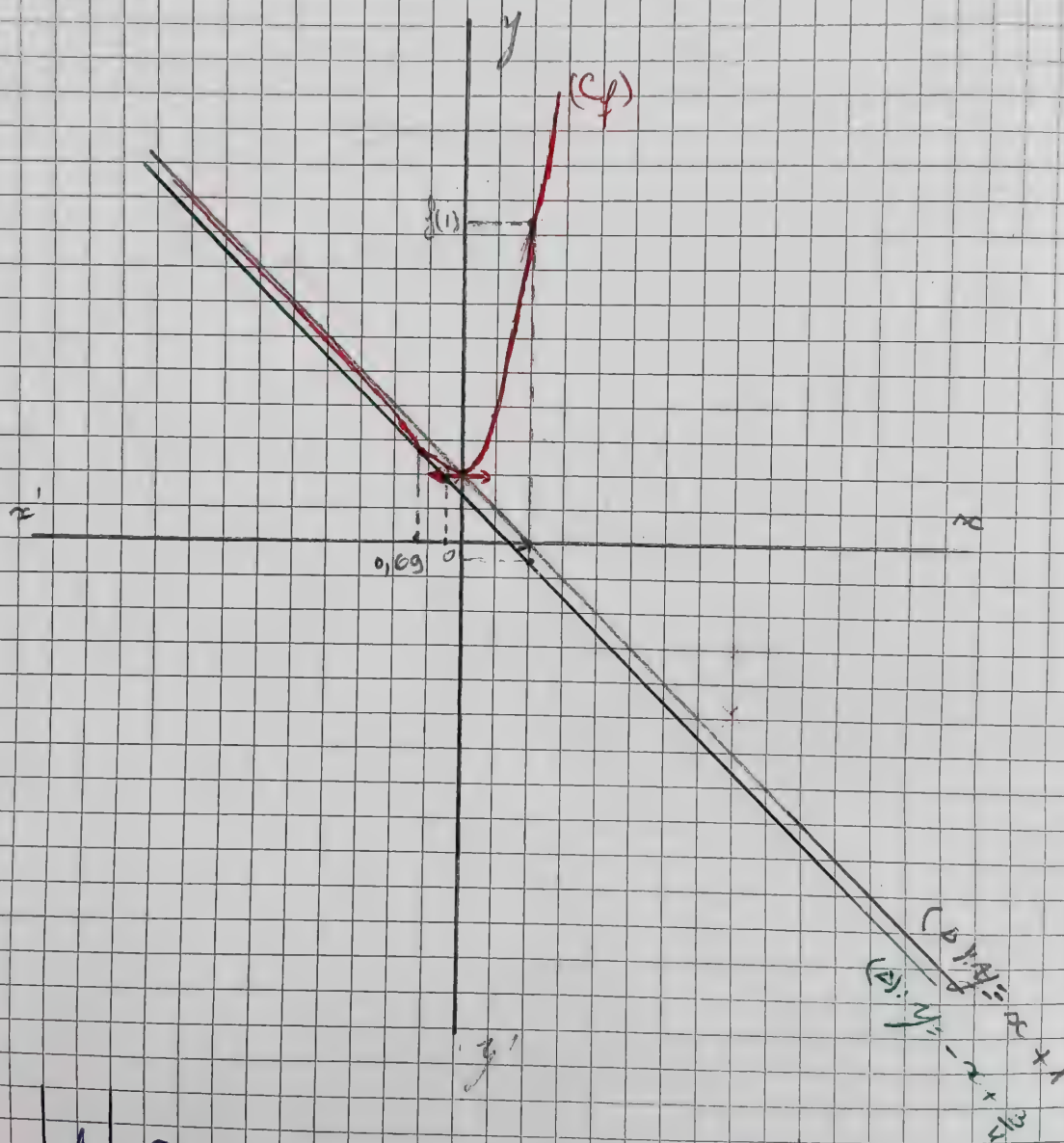
$$f(\ln(\frac{1}{u})) = -\ln(\frac{1}{u}) + 1 + e^{\frac{1}{u}} - e^{\ln(\frac{1}{u})}$$

$$f(\ln(\frac{1}{u})) = -\ln(\frac{1}{u}) + 1 + e^{\ln[\frac{1}{u}]} - \frac{1}{u}$$

$$= -\ln(\frac{1}{u}) + 1 + \frac{1}{u} - \frac{1}{u}$$

$$f(\ln(\frac{1}{u})) = \frac{13}{16} - \ln(\frac{1}{u})$$

المشتق في (Cf) و (Δ) في (2)



x	$-\frac{1}{u}$	0
$y = -x + \frac{3}{u}$	1	$\frac{3}{u}$

x	0	1
$y = -x + 1$	1	0

$$f(1) = -1 + 1 + e^2 - e = 0 + e^2 - e \approx 4,7$$

$$\ln \frac{1}{2} = 0,69$$



(3) ناقش بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد نقاط تقاطع المنحني (ع) مع المنحني الذي يعادل  $y = -x + m$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = -x + m \end{cases} \quad \text{أي}$$

نلاحظ أن  $(\Delta_m) \parallel (\Delta)$  و  $(\Delta_m) \parallel (\Delta')$

- إذا كان  $m < \frac{3}{4}$  لا توجد نقاط تقاطع
- إذا كان  $m = \frac{3}{4}$  توجد نقطة تماس
- إذا كان  $\frac{3}{4} < m < 1$  توجد نقطتان
- إذا كان  $m > 1$  توجد نقطة واحدة

المسألة (59)

(1) حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $e^{2x+1} - 8e^x + 12 = 0$

(2) حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة:  $\ln\left(\frac{e}{2x}\right) + \ln x < 1$

(3) حل في  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  المعادلة

$$\begin{cases} y \times e^x + e^x = 1 \\ y \times e^{2x} + e^{x+1} = e \end{cases}$$

(1) نحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة المعطاة

$$e^{2x+1} - 8e^x + 12 = 0$$

معرفاً على  $\mathbb{R}$  وتكتب:

$$e^{2x} \times e - 8e^x + 12 = 0$$

$$e(e^x)^2 - 8e^x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} t = e^x \\ et^2 - 8t + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(e)(12)$$

$$\Delta = 64 - 48e$$

أي  $\Delta < 0$  لأن  $e \approx 2.718$



وحيث المعادله (\*) ليس لها حلول في  $\mathbb{R}$  ، بالتالي المعادله

$$S_1 = \emptyset$$

المعادلة ليس لها حلول في  $\mathbb{R}$  اي

(2) حل التفاضلية في  $\mathbb{R}$

$$x > 0 \quad \text{اي} \quad \begin{cases} \frac{e}{2x} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \ln\left(\frac{e}{2x}\right) + \ln 2 < 1$$

$$\ln e - \ln 2x + \ln 2 < 1 \quad \text{ونكتب}$$

$$1 - \ln 2x + \ln 2 < 1$$

$$\ln 2 < \ln 2x$$

$$2 < e^x$$

$$1 < x$$

$$S_2 = ]1, +\infty[ \quad \text{وحيث}$$

(3) الحالة ثالثة

$$\begin{cases} y \times e^{2x} + e^{2x} = e^x \\ y \times e^{2x} + e^{x+1} = e \end{cases} \quad \text{في الطرف الثاني}$$

$$e^{2x} - e^{x+1} = e^x - e \quad \text{وبالطرف نجده}$$

$$e^{2x} - e^{x+1} - (e^x - e) = 0$$

$$(e^x)^2 - e^x \cdot e - (e^x - e) = 0$$

$$e^x(e^x - e) - (e^x - e) = 0$$

$$(e^x - e)(e^x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} e^x - e = 0 \\ e^x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x = e \\ e^x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$



$$y = \frac{1-e^x}{e^x} \quad \text{عند } x=1 \text{ لدينا :}$$

$$y = \frac{1-e^0}{e^0} = \frac{1-1}{1} = 0 \quad \text{عند } x=0 \text{ لدينا :}$$

$$C_3 = \left\{ \left(1; \frac{1-e}{e}\right); (0,0) \right\} \text{ ونقطة}$$

التمرين (60)

بسط ما يلي :

$$\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad (1)$$

$$\ln(e\sqrt{e}) \quad (2)$$

$$\ln(e^3) - \ln(e^2) \quad (3)$$

$$\frac{\ln 100}{\ln 10} \quad (4)$$

$$\ln 16 - \ln 8 \quad (5)$$

$$e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} \quad (6)$$

$$e^{1+\ln 2} \quad (7)$$

$$e^{-2\ln 3} \quad (8)$$

$b > 0$  و  $a > 0$  لأن  $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}\right) = \ln 1 = 0$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$$

$$\ln 1 = 0$$

$b > 0$  و  $a > 0$  لأن  $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln e\sqrt{e} = \ln e + \ln \sqrt{e} \quad \text{لدينا :}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \ln e$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$a > 0$$



$$\begin{aligned}\ln(e^3) - \ln(e^2) &= 3 \ln e - 2 \ln e \quad (3) \\ &= 3 - 2 \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln a^n &= n \ln a \\ a &> 0 \\ n &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\ln 100}{\ln 10} &= \frac{\ln(10^2)}{\ln 10} \quad (4) \\ &= \frac{2 \ln 10}{\ln 10} \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 16 - \ln 8 &= \ln\left(\frac{16}{8}\right) \quad (5) \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &> 0 \\ e^{\ln a} &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln 16 - \ln 8 &= \ln(8 \times 2) - \ln 8 \quad (2) \\ &= \ln 8 + \ln 2 - \ln 8 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

$$\ln(e^n) = n$$

$$\begin{aligned}\ln 16 - \ln 8 &= \ln(2^4) - \ln(2^3) \quad (3) \\ &= 4 \ln 2 - 3 \ln 2 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} &= 5 + (e^{\ln 3})^{-1} \quad (6) \\ &= 5 + 3^{-1} \\ &= 5 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &> 0 \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) &= -\ln a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{\ln 5} + e^{-\ln 3} &= 5 + e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (7) \\ &= 5 + \frac{1}{3} \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 e^{1+\ln 2} &= e^1 \times e^{\ln 2} \\
 &= e \times 2 \\
 &= 2e
 \end{aligned}$$

(7) ليا 1 ب

$$\begin{aligned}
 e^{1+\ln 2} &= e^{\ln e + \ln 2} \\
 &= e^{\ln(2e)} \\
 &= 2e
 \end{aligned}$$

(2) ب

$$\begin{aligned}
 e^{-2 \ln 3} &= (e^{\ln 3})^{-2} \\
 &= 3^{-2} \\
 &= \frac{1}{3^2} \\
 &= \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

(8) ليا 1 ب

$$\begin{aligned}
 e^{-2 \ln 3} &= e^{\ln(3^{-2})} \\
 &= 3^{-2} \\
 &= \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

2 ب

المتمم (6.1)

في الدالة المعطاة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

أثبت أن الدالة فردية

في دالة فردية معناه من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases}
 (-x) \in \mathbb{R} & \text{(مفقعة)} \\
 f(-x) = -f(x) & \text{و}
 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$  ليا 1 ب

(1) من أجل

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \ln[-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}] \\
 &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})
 \end{aligned}$$



$$\text{احد المخرجين في المرافق} = \ln \left[ \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \right]$$

$$= \ln \left[ \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \right]$$

$$= \ln \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$

$$= -\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$= -f(x)$$

اذن  $f$  دالة فردية

ط (2)  $f$  فردية صالحة  $x \in \mathbb{R}$  لكل  $\infty$   
 $f(-x) + f(x) = 0$

$$\begin{aligned} f(-x) + f(x) &= \ln[-x + \sqrt{(-x)^2+1}] + \ln[x + \sqrt{x^2+1}] \\ &= \ln[(-x + \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})] \\ &= \ln[(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2] \\ &= \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

التمرين (82)

حل، فني  $\mathbb{R}$ ، الدالات التالية:

$$\ln x = 1 + \ln 3 \quad (1)$$

$$(\ln x - 1) \ln x = 0 \quad (2)$$

$$\ln(4x-10) + \ln(2x-2)^2 - 2\ln(4x-4) = 0 \quad (3)$$

$$\ln(3-x) - \ln \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \ln(2x) \quad (4)$$

$\ln A$  موجود :  $A > 0$



89

$x > 0$  معاً  $\ln x = 1 + \ln 3$  (1)

$b > 0, a > 0$   
 $a = b$  أو  $\ln a = \ln b$

$x = e^{1 + \ln 3}$  ولي

$x = e^1 \times e^{\ln 3}$

$x = e \times 3$

$S_1 = \{3e\}$  أي  $x = 3e$

تكون  $\ln x = 1 + \ln 3$  (2)

$x > 0$   
 $x = e^a$  أو  $\ln x = a$

$\ln x = \ln e + \ln 3$

$\ln x = \ln(3e)$

$x = 3e$  أي

$x > 0$  معاً  $(\ln x - 1) \ln x = 0$  (2)

ولي  
 $\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = 0 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} \ln x - 1 = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = e \\ x = 1 \end{cases}$  أي

$S_2 = \{e, 1\}$  ولي

$\ln(4x - 10) + \ln(2x - 2)^2 - 2 \ln(4x - 4) = 0$  (3)

معاً من أجل

$\begin{cases} 4x - 10 > 0 \\ (2x - 2)^2 > 0 \\ 4x - 4 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x \neq 1 \\ x > 1 \end{cases}$

$x > \frac{5}{2}$  ولي

$(x \in ] \frac{5}{2} ; +\infty [$  أي

~~$x \in ] \frac{5}{2} ; +\infty [$~~



$$\ln[(4x-10)(2x-2)^2] = \ln[(4x-4)^2] \quad \text{ونكتب}$$

$$(4x-10)(2x-2)^2 = (4x-4)^2$$

$$(4x-10)(2x-2)^2 - (4x-4)^2 = 0$$

$$(4x-10)(2x-2)^2 - [2(2x-2)]^2 = 0$$

$$(4x-10)(2x-2)^2 - 4(2x-2)^2 = 0$$

$$(2x-2)^2 [4x-10-4] = 0$$

$$(2x-2)^2 (4x-14) = 0$$

$$\begin{cases} (2x-2)^2 = 0 & \text{أى} \\ 4x-14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 & \text{مرفوض لأنه لا يحقق الشرط} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \quad \text{أى}$$

$$S_2 = \left\{ \frac{7}{2} \right\} \quad \text{ومنه}$$

$$\ln(3-x) - \ln \sqrt{x+1} = \frac{1}{2} \ln(ex) \quad (4)$$

مرفوض من أجل

$$\begin{cases} 3-x > 0 \\ x+1 > 0 \\ ex > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{أى}$$

$$0 < x < 3 \quad \text{ومنه}$$

$$(x \in ]0, 3[)$$





$$\ln(3-x) - \frac{1}{2} \ln(x+1) = \frac{1}{2} \ln 2x$$

$$2 \ln(3-x) - \ln(x+1) = \ln(2x)$$

$$\ln[(3-x)^2] = \ln(2x) + \ln(x+1) \quad \text{أي}$$

$$\ln[(3-x)^2] = \ln[2x(x+1)] \quad \text{أي}$$

$$(3-x)^2 = 2x(x+1) \quad \text{أي}$$

$$9 - 6x + x^2 = 2x^2 + 2x$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -9 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(حل ظاهر)} \\ \text{مرفوض} \end{matrix}$$

لأن

$$-9 \notin ]0, 3[ \quad \text{لأن}$$

$$S_4 = \{1\} \quad \text{وحده}$$

المسألة (3)

حل في  $\mathbb{R}$  المعادلات الآتية:

$$e \ln^2 x - 3 \ln x - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\ln^2 x - 2 \ln(x^2) - 5 = 0 \quad (2)$$

$$\ln(1 - \ln x) = e \quad (3)$$

$$\ln|x+1| = -\ln|3x+5| \quad (4)$$

$$x > 0$$

$$\ln^2 x = (\ln x)^2$$

$$x > 0$$

$$\ln(x^2) = 2 \ln x$$

$$\ln^2 x \neq \ln(x^2) \quad x > 0 \quad \text{و نكتب}$$

$$e(\ln x)^2 - 3 \ln x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = t \\ 2t^2 - 3t - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-3)^2 - 4(2)(-2)$$

لدينا



$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$x$	-	0	+
$x$	-	0	+
$x^2$	+	0	+

$x \neq 0$  يعني  $x^2 > 0$

$x \in ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$

$x \in \mathbb{R}$  يعني  $x^2 \geq 0$

$$\Delta = 3, 16$$

$$\Delta = 25$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2(2)} = 2 \\ x_2 = \frac{3-5}{2(2)} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\ln x = 2$  لدينا  $x_1 = 2$  من أجل (1)

$$x = e^2$$

$\ln x = -\frac{1}{2}$  لدينا  $x_2 = -\frac{1}{2}$  من أجل (2)

$$x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$S_1 = \{e^2; e^{-\frac{1}{2}}\}$$

$$\ln^2 x - 2 \ln(x^2) = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$(x > 0)$$

$$\ln^2 x - 2x \ln x - 5 = 0$$

$$(\ln x)^2 - 4 \ln x - 5 = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = y \\ y^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -1 \text{ (حل ظاهر)} \\ y_2 = -\frac{c}{a} = 5 \end{cases}$$

$$\ln x = -1 \quad \text{لدينا } y_1 = -1 \text{ من أجل (1)}$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\ln x = 5 \quad \text{لدينا } y_2 = 5 \text{ من أجل (2)}$$

$$x = e^5$$



$$x \neq 0$$

$$\ln(x^2) = 2 \ln|x|$$

$$\ln(x^{2k}) = 2k \ln|x|$$

$$k \in \mathbb{N}^*$$

$$x > 0$$

$$\ln(x^3) = 3 \ln x$$

$$\ln(x^{2k+1}) = (2k+1) \ln x$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$b > 0 \text{ و } a > 0$$

$$a < b \text{ يـ } \ln a < \ln b$$

$$x > 0$$

$$x < e^a \text{ يـ } \ln x < a$$

$$x > 0$$

$$\text{يـ } \ln x = a$$

$$x = e^a$$

$$S_2 = \left\{ \frac{1}{e}, e^5 \right\}$$

$$\text{دو } \ln(1 - \ln x) = 2(3$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 > \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln e > \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ e > x \end{cases}$$



$$x \in ]0, e[ \quad \text{اي}$$

$$1 - \ln x = e^2 \quad \text{ونكتب}$$

$$1 - e^2 = \ln x \quad \text{اي}$$

$$x = e^{1-e^2} \approx 0.0016$$

$$e^{1-e^2} \in ]0, e[ \quad \text{نـ}$$

$$S_3 = \{e^{1-e^2}\} \quad \text{دو}$$

$$\ln|x+1| = -\ln|3x+5| \quad (4)$$

$$\begin{cases} |x+1| > 0 \\ |3x+5| > 0 \end{cases} \quad \text{موجب من اجل}$$



$$\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 3x+5 \neq 0 \end{cases}$$

سي

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

سي

$$\ln|x+1| + \ln|3x+5| = 0$$

$$\ln[|x+1| \times |3x+5|] = \ln 1$$

و

$$|x| \times |y| = |x \times y|$$

$$x = y$$

$$x = -y$$

$$|x| = |y|$$

$$|x+1| \times |3x+5| = 1$$

$$|(x+1)(3x+5)| = 1$$

$$\begin{cases} (x+1)(3x+5) = 1 \\ (x+1)(3x+5) = -1 \end{cases}$$

$$(x+1)(3x+5) = -1$$

$$3x^2 + 5x + 3x + 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$3x^2 + 8x + 4 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(3)(4)$$

$$= 64 - 48$$

$$= 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-8+4}{2(3)} = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-8-4}{2(3)} = -2 \end{cases}$$

$$(x+1)(3x+5) = -1$$

$$(x+1)(3x+5) = -1$$

(00)

$$3x^2 + 5x + 3x + 5 + 1 = 0$$

$$3x^2 + 8x + 6 = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(3)(6)$$

$$\Delta = 64 - 72$$

$$\Delta = -8$$

IR

و من هذه الحالة ليس لها حلول في



و بالتالي مجموعة حلول المعادلة الخطية هي:

$$S_4 = \left\{ -2, -\frac{2}{3} \right\}$$

المعنى (14)

حل في  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  المعادلة التالية:

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln 3 \end{cases}$$

الجملة معقوفة من أجل

$$\begin{cases} \frac{x}{y} > 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} x > 0 \text{ و } y > 0 \\ x < 0 \text{ و } y < 0 \end{cases}$$

ونكتب

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y = 16 & (1) \\ 3x = y & (2) \end{cases}$$

حسب (2) فإن (1) تصبح

$$x^2 + 2(3x) = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(-16)$$

$$\Delta = 36 + 64$$

$$\Delta = 100$$



$$\begin{cases} x_1 = \frac{-6 + 10}{2(1)} = 2 \\ x_2 = \frac{-6 - 10}{2(1)} = -8 \end{cases}$$

من أجل  $x_1 = 2$  لدينا

$$y_1 = 3x_1 = 3(2) = 6$$

من أجل  $x_2 = -8$  لدينا

$$y_2 = 3x_2 = 3(-8) = -24$$

ومن هنا

$$S = \{(2; 6); (-8; -24)\}$$

المسألة (65)

أوجد الشرائط (x, y) الحقيقية التي تحقق المعادلة التالية:

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = e \ln(6) \\ e^x = \frac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$$

الحالة معروفة من أجل  $x \neq 0$  و  $y \neq 0$

$$\begin{cases} \ln(x^2 + y^2) = \ln(6^2) \\ e^x = e^{-(1+y)} \end{cases} \quad \text{ونكتب}$$

$$\begin{cases} x^2 y^2 = 6^2 \\ x = -1 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x \cdot y)^2 = 6^2 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = -6 \text{ أو } xy = 6 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} xy = -6 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} xy = 6 \\ x + y = -1 \end{cases} \end{cases}$$



$$\begin{cases} xy = -6 = P \\ x + y = -1 = S \end{cases} \quad (6)$$

$x^2 - 13x + P = 0$  : المعادلة في  $x$  و  $y$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad (5')$$

$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-6) = 25$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

و منه  $x_1 = 2$  و  $y_1 = -3$

أو  $x_2 = -3$  و  $y_2 = 2$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad (6)$$

$x$  و  $y$  : المعادلة

$$T^2 - 5T + P = 0$$

$$T^2 + T + 6 = 0 \quad \text{أي !}$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(6) = -23$$

أي  $\Delta < 0$  ومنه هذه المعادلة ليس لها حل وبالتالي هذه الجملة ليس لها حل

ومنه مجموعة حلول الحالة للعبارة هي

$$S = \{(2; -3); (-3; 2)\}$$

التمرين (66)

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات الآتية

$$\ln x \leq 1 \quad (1)$$

$$2 + \ln x > 0 \quad (2)$$

$$\ln [(x-1)^9] \geq 0 \quad (3)$$



$$b > 0, a > 0 \\ a < b \text{ or } \ln a < \ln b$$

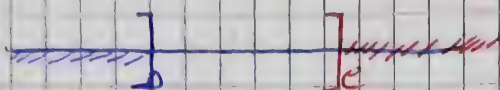
$$x > 0 \\ x < e^a \text{ or } \ln x < a$$

$$\frac{e - \ln x}{1 + \ln x} > e$$

(4)

$$x > 0 \text{ معرفة من أجل } \ln x \leq 1$$

$$x \leq e$$



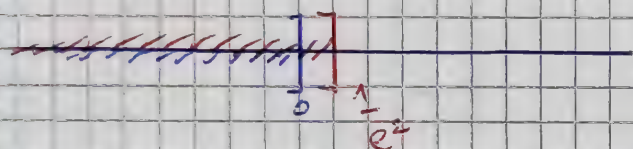
$$S_1 = ]0; e]$$

$$x > 0 \text{ معرفة من أجل } e + \ln x > 0$$

$$\ln x > -2$$

$$x > e^{-2}$$

$$x > \frac{1}{e^2}$$



$$S_2 = \left[ \frac{1}{e^2}; +\infty \right[$$

$$\ln [(x-2)^2] \geq 0$$

$$(x-2)^2 \geq 0$$

$$x-2 \neq 0$$

$$(x \in ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[) \text{ أي } x \neq 2$$

$$(x-2)^2 \geq e^0$$

$$(x-2)^2 \geq 1$$

$$(x-2)^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 1 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 3$$

ندرس إشارة

حدراه هنا

	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	0	+



$$S = ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

ومنه:

2. لا بد من:

$$\ln[(x-2)^e] \geq 0$$

$$e \ln|x-2| \geq 0 \quad \text{أي}$$

$$\ln|x-2| \geq 0$$

$$\ln|x-2| \geq \ln 1$$

$$|x-2| \geq 1$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 1 \\ x-2 \leq -1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

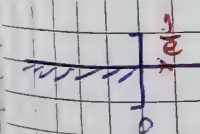
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ 1 + \ln x \neq 0 \end{cases}$$

موقف من أجل

$$\frac{2 - \ln x}{1 + \ln x}$$

(4)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \end{cases}$$



$$x \in ]0; \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[$$

والمتراجعة تكسب

$$\frac{2 - \ln x}{1 + \ln x} - 2 > 0$$

$$\frac{2 - \ln x}{1 + \ln x} - \frac{2(1 + \ln x)}{1 + \ln x} > 0$$

$$\frac{2 - \ln x - 2 - 2 \ln x}{1 + \ln x} > 0$$

$$\frac{-3 \ln x}{1 + \ln x} > 0$$

$$\frac{-3 \ln x}{1 + \ln x}$$

ندرس البسط



$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

$$\ln x < 0$$

$$x < 1$$

$$\ln x > -1$$

$$x > e^{-1}$$

$$x > \frac{1}{e}$$

$$\text{إما } -3 \ln x = 0$$

أي

$$\text{إما } -3 \ln x > 0$$

أي

$$\text{إما } 1 + \ln x > 0$$

أي

أي

$x$	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$-3 \ln x$		+	+	-
$1 + \ln x$		-	+	+
$\frac{-3 \ln x}{1 + \ln x}$		-	+	-

$$S_4 = \left] \frac{1}{e} ; 1 \right[$$

و

التقريب (67)

$$(\ln x - 2) \ln x$$

أو إشارة

$$x > 0 \quad \text{أو } (\ln x - 2) \ln x$$

$$x = 1 \quad \text{إما } \ln x = 0$$

$$x > 1 \quad \text{إما } \ln x > 0$$

$$\ln x = 2 \quad \text{إما } \ln x - 2 = 0$$

$$x = e^2$$

$$\ln x > 2 \quad \text{أي } \ln x - 2 > 0$$

$$x > e^2$$

$x$	0	1	$e^2$	$+\infty$
$\ln x$		-	+	+
$\ln x - 2$		-	-	+
$(\ln x - 2) \ln x$		+	-	+



$$x \in ]0; 1[ \cup ]e^2; +\infty[$$

$$x \in ]0; e^2[$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

$$\text{محتاج } (\ln x - 2) \ln x > 0$$

$$\text{محتاج } (\ln x - 2) \ln x < 0$$

$$\text{محتاج } (\ln x - 2) \ln x = 0$$

التمرين (62)

$$\ln^2 x - \ln x - 6 \leq 0 \quad \text{المترابضة}$$

للمترابضة معرفة من أجل  $x > 0$

$$\text{ونكتب } (\ln x)^2 - \ln x - 6 \leq 0$$

$$\begin{cases} \ln x = t \\ t^2 - t - 6 \leq 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$t^2 - t - 6$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ t_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$t$	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$t^2 - t - 6$	+	0	-	0	+

$$-2 \leq t \leq 3 \quad \text{محتاج } t^2 - t - 6 \leq 0$$

$$-2 \leq \ln x \leq 3 \quad \text{محتاج } (\ln x)^2 - \ln x - 6 \leq 0$$

$$e^{-2} \leq x \leq e^3 \quad \text{أي}$$

$$S = [e^{-2}; e^3] \quad \text{ومنها}$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$x > 0$$

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$u \neq 0$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$u > 0$$



التمرين (69)

احسب  $f'(x)$  في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = \ln(x^2 - 7x + 6) \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{e - \ln x}{1 + \ln x} \quad (2)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) \quad (3)$$

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 6 \quad (4)$$

$$f(x) = (x-2) \ln|x-2| \quad (5)$$

(1) حساب  $f'(x)$  حيث  $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 6)$

لدينا  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]6, +\infty[$

$f$  تقبل الاشتقاق على كل من المجالين  $]6, +\infty[$  و  $]-\infty, 1[$

ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 6}$$

(2) حساب  $f'(x)$  حيث  $f(x) = \frac{e - \ln x}{1 + \ln x}$

لدينا  $D_f = ]0, \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}, +\infty[$

$f$  تقبل الاشتقاق على  $]0, \frac{1}{e}[$  و  $]\frac{1}{e}, +\infty[$  ولدينا:

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x}(e - \ln x)}{(1 + \ln x)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x}[1 + \ln x + e - \ln x]}{(1 + \ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{3}{x}}{(1 + \ln x)^2} = -\frac{3}{x(1 + \ln x)^2}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)$$

(3) حساب  $f'(x)$  حيث

لدينا  $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]\frac{3}{2}, +\infty[$



في الفترة  $\left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$  و  $\left] -\infty, 1 \right[$  على

والدنيا

$$f'(x) = \frac{e(x-1) - 1(2x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-3}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{2x-3}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(2x-3)}$$

(2) لدينا

$$f(x) = \ln \left( \frac{2x-3}{x-1} \right)$$

$$f(x) = \ln |2x-3| - \ln |x-1|$$

و

$$f'(x) = \frac{e(x-1) - 1(2x-3)}{(2x-3)(x-1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{(2x-3)(x-1)}$$

(4) حساب  $f'(x)$  حيث

$$f(x) = (\ln x)^e - \ln x - 6$$

$$D_f = ]0, +\infty[$$

لدينا

في الفترة  $D_f$  و  $D_f$  لدينا

$$f'(x) = e(\ln x)^{e-1} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} [e \ln x - 1]$$

(5)

0+

0-

0

1

2

1

2

المتغير

1

1

2

2

3

4



(5) حساب  $f'(x)$  حيث  $f(x) = (x-2) \cdot \ln|x-2|$   
 $x \neq 2$  و  $|x-2| > 0$  و  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

نقل الـ 2 لتتلاقى مع 1  
 $]2, +\infty[$  و  $]-\infty, 2[$

و لـ  $f'(x) = 1 \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} \times (x-2)$

و  $f'(x) = \ln|x-2| + 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad / 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad / 0^-$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad / 0^+$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \quad / 0^-$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad / 0$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad / 0$

المسارين (14)

احسب النهايات الآتية

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e \ln x - 3}{\ln x + 1}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \ln x - 3}{\ln x + 1}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty \quad \text{لـ (1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{و}$$

$$\text{"}\infty-\infty\text{" القيد } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \quad \text{لـ (2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad = +\infty$$

$$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" القيد } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e \ln x - 3}{\ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x) \left[2 - \frac{3}{\ln x}\right]}{(\ln x) \left[1 + \frac{1}{\ln x}\right]} \quad \text{لـ (3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{3}{\ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}} = e$$

$$\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" القيد } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e \ln x - 3}{\ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e - \frac{3}{\ln x}}{1 + \frac{1}{\ln x}} \quad \text{لـ (4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{و} \quad = e$$

التمرين (31)

في الحالة المعقّدة على

$$]0; \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{e \ln x - 3}{\ln x + 1}$$

أدرس تعبيرات الدالة  $f$  ثم ارسم تمثيلها البياني (C<sub>f</sub>)

$$D_f = ]0; \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \quad (\text{التمرين رقم 70})$$



$$* \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{2 \ln x - 3}{\ln x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} (2 \ln x - 3) = 2 \ln\left(\frac{1}{e}\right) - 3 \quad \text{و } x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} (\ln x + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} x &< \frac{1}{e} && \text{و } x \\ \ln x &< \ln \frac{1}{e} && \text{و } x \\ \ln x &< -1 && \text{و } x \\ \ln x + 1 &< 0 && \text{و } x \end{aligned}$$

$$* \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} (\ln x + 1) = 0^+ \quad \text{و } x$$

$$\left] \frac{1}{e}; +\infty \right[ \quad \text{و } x \quad \left] 0; \frac{1}{e} \right[ \quad \text{و } x \quad \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[ \quad \text{و } x$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} (\ln x + 1) - \frac{1}{x} (2 \ln x - 3)}{(\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} [2(\ln x + 1) - (2 \ln x - 3)]}{(\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} (2 \ln x + 2 - 2 \ln x + 3)}{(\ln x + 1)^2}$$

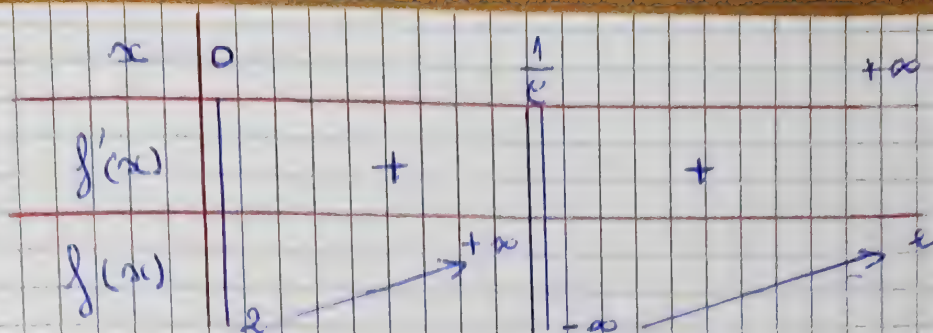
$$f'(x) = \frac{\frac{5}{x}}{(\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{x (\ln x + 1)^2}$$

$$x \in \left] 0; \frac{1}{e} \right[ \cup \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[ \quad \text{و } x$$

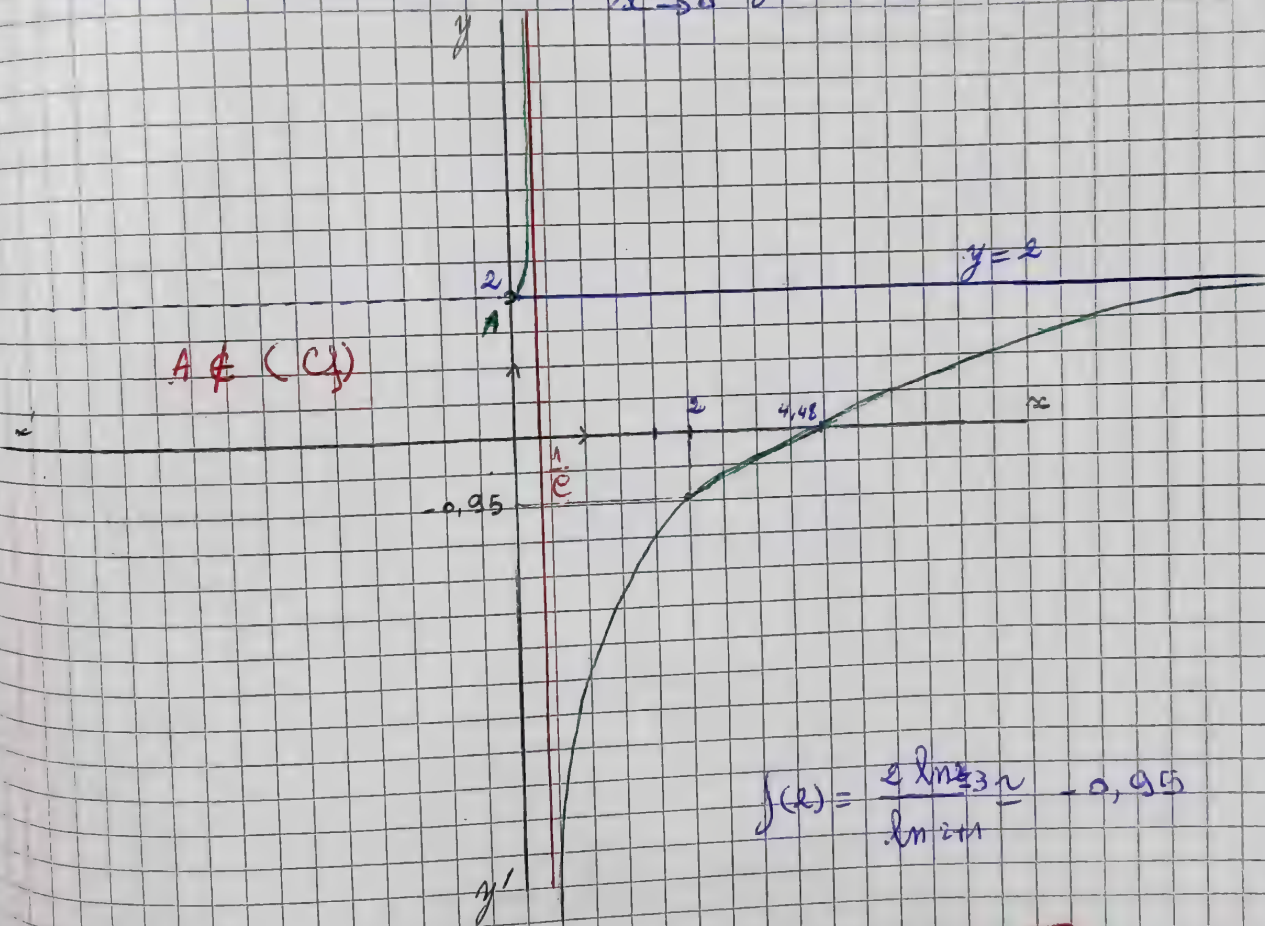
$$f'(x) > 0 \quad \text{و } x \quad \text{و } x \quad \text{و } x$$





رسم  $f$

- (1) المستقيم الذي معادله  $y=2$  مقارب لـ  $f$  يوارث  $(x', x)$  بجا
- (2) المستقيم الذي معادله  $x = \frac{1}{e}$  مقارب لـ  $f$  يوارث  $(y, y')$
- (3) بما أن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  إذن  $A(0, 2)$  نقطة نهاية



$$f(e) = \frac{e^{\ln e} - 1}{e^{\ln e} + 1} = \frac{e - 1}{e + 1} \approx 0.95$$

التحريش (3)

احسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left( \frac{2x-3}{x+1} \right) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{2x-3}{x+1} \right) \quad (5)$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{\ln x}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{\ln x}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \lim_{t \rightarrow 2} \ln t$$

$$\frac{2x-3}{x+1} = t \quad \text{و } t \rightarrow 2 \quad = \ln 2$$

$$t \rightarrow 2 \quad \text{و } x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2x-3}{x+1}\right) = \ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\ln x} = +\infty$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^-$$

$$\ln x > 0$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \quad \text{و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\ln x} = -\infty$$

$$\ln x < \ln 1 \quad \text{و } x < 1$$

$$\ln x < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$$

$$x = 1+t \quad \text{و } x-1 = t$$

$$t \rightarrow 0 \quad \text{و } x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t) = 0$$

$$= 1$$



المقرر (30)

الحساب التفاضلي - التفاضل

$$\lim_{x \rightarrow e} (x - e) \ln(x - e) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2 + 5x} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad (4)$$

$\frac{1}{3}$  "0 x ∞"  $\cap$   $\epsilon$   $\tau$   $\lim_{x \rightarrow e} (x - e) \ln(x - e) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t$

$x - e = t$   $t \rightarrow 0$   $x \rightarrow e$   $U$

$x$	$-\infty$	$e$	$+\infty$
$x - e$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

"0/0"  $\cap$   $\epsilon$   $\tau$   $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2 + 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x(x+5)}$

$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{1+\frac{c}{b}}$

$\frac{a}{b+c} = \frac{1}{b} \times \frac{a}{1+\frac{c}{b}}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

"0/0"  $\cap$   $\epsilon$   $\tau$   $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$

$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$

$\ln(a-b) \neq \ln a - \ln b$

$f(x) = \ln x$   $\cap$   $\tau$   $= f'(3)$

$= \frac{1}{3}$



$$x = t + 3 \quad \text{or} \quad x - 3 = t \quad \text{Page 120}$$

$$t \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad x \rightarrow 3 \quad \text{Lb}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(t+3) - \ln 3}{t} \quad \text{Lb} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{t+3}{3}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3} \times 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{\frac{t}{3}} \times \frac{1}{3} \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{x - 3} \quad \text{30} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{3y - 3} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{3(y-1)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y-1} \times \frac{1}{3} \\ &= 1 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$x = 3y$  or  $\frac{x}{3} = y$  Page 120

$y \rightarrow 1$  if  $x \rightarrow 3$  Lb

" $0 \times \infty$ " C.T.T

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{Page 121} \\ x = \frac{1}{t} \quad \text{or} \quad \frac{1}{x} = t \\ t \rightarrow 0 \quad \text{if} \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{Lb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(1+t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= 1 \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1}{u-1} \ln u$$

$$\frac{x+1}{x} = u \quad \text{فإن} \quad x \rightarrow +\infty \quad u \rightarrow 1$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u-1} = 1$$

$$x+1 = u \times x \quad \text{نكتب} \quad \frac{x+1}{x} = u$$

$$x - u \times x = -1$$

$$(1-u)x = -1$$

$$x = -\frac{1}{1-u}$$

$$x = \frac{1}{u-1}$$

التمرين (74)

في الدالة المعرفة بـ:

$$f(x) = 2 + \frac{1}{\ln x}$$

أدرس تغيرات الدالة في  
ثم ارسم تمثيلها البياني (C<sub>f</sub>)

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_f = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

وحد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{بما أن} \quad x \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)$$



$$x < 1 \text{ (ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} = -\infty \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\left( \begin{array}{l} \ln x < \ln 1 \\ \ln x < 0 \end{array} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad \text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e + \frac{1}{\ln x} \right) = e$$

$$\left( \frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$u \neq 0$$

\*  $f$  تقبل الاستقار على  $]0, 1[$  وعلى  $]1, +\infty[$  وليس على

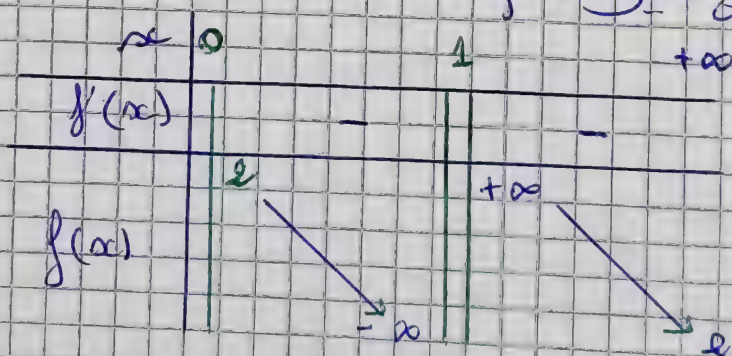
$$f(x) = 0 - \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

نلاحظ أن  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in D_f$  أي  $f$  متناقصة على

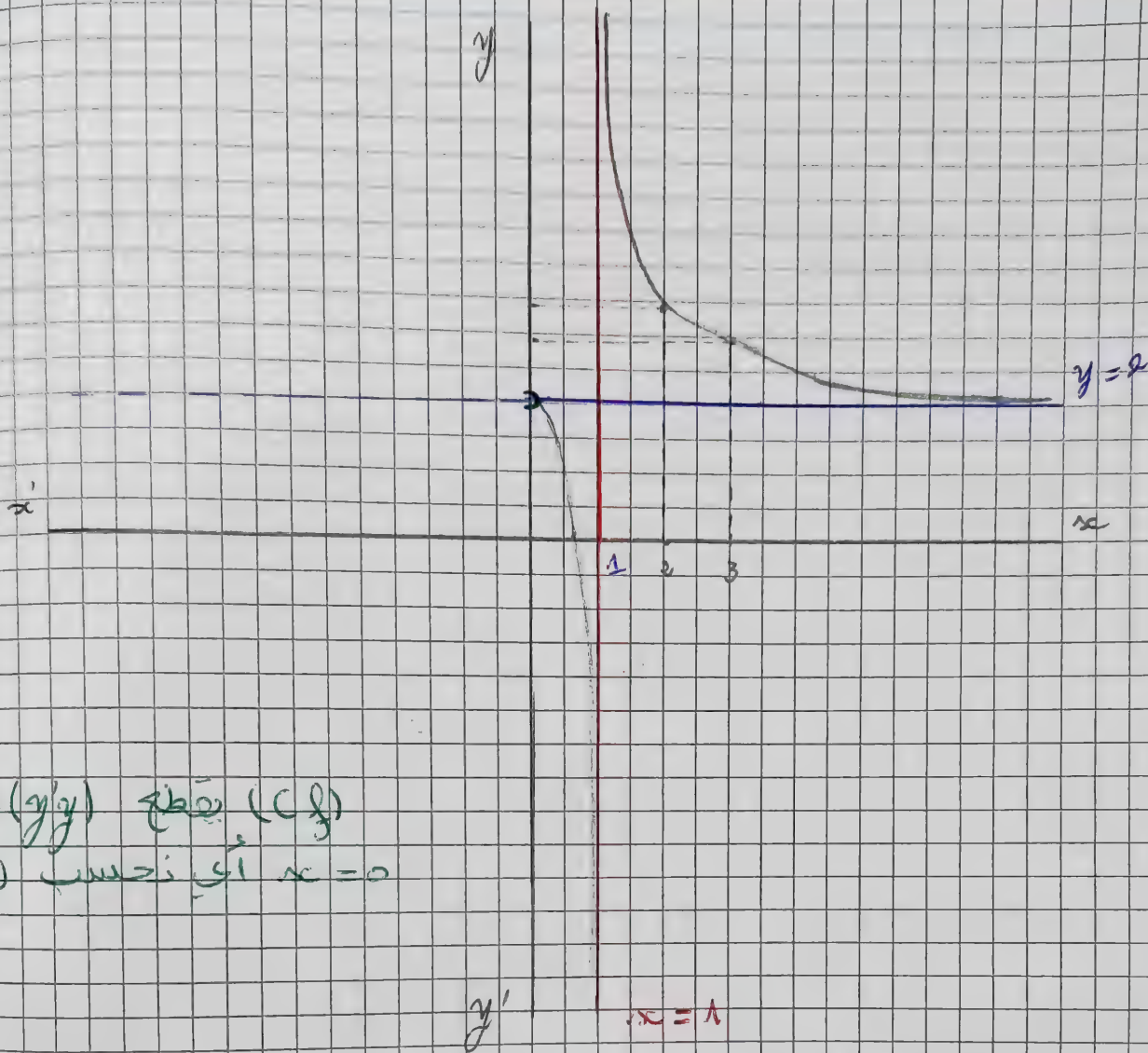
$]0, 1[$  وعلى  $]1, +\infty[$

جدول تغيرات  $f$



\* رسم  $(C_f)$   
 المستقيم الذي معادله  $x=1$  مقارب لـ  $(C_f)$  يوازي  $(y'y)$   
 المستقيم الذي معادله  $y=e$  مقارب لـ  $(C_f)$  يوازي  $(x'e')$  ومحوار  $+\infty$   
 النقطة  $A(0, e)$  نقطة نهاية





(Cf) نقطة  $(y/y)$   
 $x=0$  أي نحسب  $f(x)$

نحل  $x \in Df$   
 $f(x) = 0$  نكتب

$$f(2) \approx 3,4$$

$$f(3) \approx 2,9$$

$$2 + \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\frac{1}{\ln x} = -2$$

$$-\frac{1}{2} = \ln x$$

$$e^{-\frac{1}{2}} = x$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = x$$

$$x \approx 0,6$$



## ④ الموضوع ④ التحريك ④

في نقاط

$$f(x) = 1 + \frac{e \ln x}{x} \quad \therefore \quad ]0, +\infty[$$

(أ) حساب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، فنسأل النتيجة هذه حساباً

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{e \ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \ln x \quad \text{لأن } x \rightarrow 0^+ \quad = -\infty$$

التفسير الهندسي

المستقيم الذي معادلاته  $x=0$  مقارب لـ (Cf) منطبق على  $y/y'$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{e \ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن } x \rightarrow +\infty \quad = 1$$

المستقيم الذي معادلاته  $y=1$  مقارب لـ (Cf) موازي (Cf) عند  $+\infty$

(ب) دراسة اتحاد منحني  $f$  على  $]0, +\infty[$

$f$  تقبل الاشتقاق على  $]0, +\infty[$  (حاصل قسمة الدالتين  $\ln x$  و  $x$  على  $x \rightarrow 0^+$  و  $x \rightarrow +\infty$ )

$$f'(x) = 0 + e \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} \quad \text{ولدينا}$$

$$f'(x) = \frac{e(1 - \ln x)}{x^2} \quad \text{أي}$$

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $1 - \ln x$  لأن  $e > 0$  و  $x^2 > 0$  على  $]0, +\infty[$

$$1 - \ln x = 0 \quad \text{أي} \quad \ln x = 1$$

$$e = x$$

$$1 > \ln x \quad \text{أي} \quad 1 - \ln x > 0$$

$$e > x \quad \text{أي}$$



$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

$[0; e]$  متناقصة <sup>منزلة</sup> صاعدة  
 $[e; +\infty[$  متناقصة صاعدة

$$f(e) = 1 + \frac{e \ln e}{e} = 1 + \frac{e}{e}$$

جدول تغيرات  $f$

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$1 + \frac{e}{e}$	1

(2) دراسة و صعية  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $y=1$  (2)

بحسب الفرق  $f(x) - y$  تم تحديد إشارته

$$f(x) - y = 1 + \frac{e \ln x}{x} - 1 = \frac{e \ln x}{x}$$

إشارة الفرق من إشارة  $\ln x$  لأن  $x > 0$  و  $e > 0$

لدينا

$x = 1$	معاد	$\ln x = 0$
$x > 1$	معاد	$\ln x > 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$		0	+
$f(x) - y$		0	+
وصعية $(C_f)$		تحت $(C_f)$	فوق $C_f$
بالنسبة لـ (2)		$\Delta$	$(\Delta)$

$(C_f)$  يقع  $(\Delta)$   
 A (1; 1) B



ب) كتابة معادلة المماس لـ  $(T)$  عند النقطة ذات القامدة 1

معادلة  $(T)$  هي:  $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 1$  إذن  $y = e(x-1) + 1$

(0,25)

أي  $(T): y = ex - 1$

$f'(1) = \frac{e(1 - \ln 1)}{1^2} = e$

ج- تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا في المجال  $[0,1]$  حيث  $e^{-0,4} < x < e^{-0,3}$

بما أن  $f$  مستمرة ومتزايدة تمامًا على  $[e^{-0,4}; e^{-0,3}]$  (لأن  $[0,1] \subset [e^{-0,4}; e^{-0,3}]$ )

أي  $f(e^{-0,4}) \times f(e^{-0,3}) < 0$  أي  $\begin{cases} f(e^{-0,4}) = -0,19 \\ f(e^{-0,3}) = 0,19 \end{cases}$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة  $f(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  حيث  $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$

\*  $f$  مستمرة ومتزايدة تمامًا على  $[0,1]$

$f(1) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

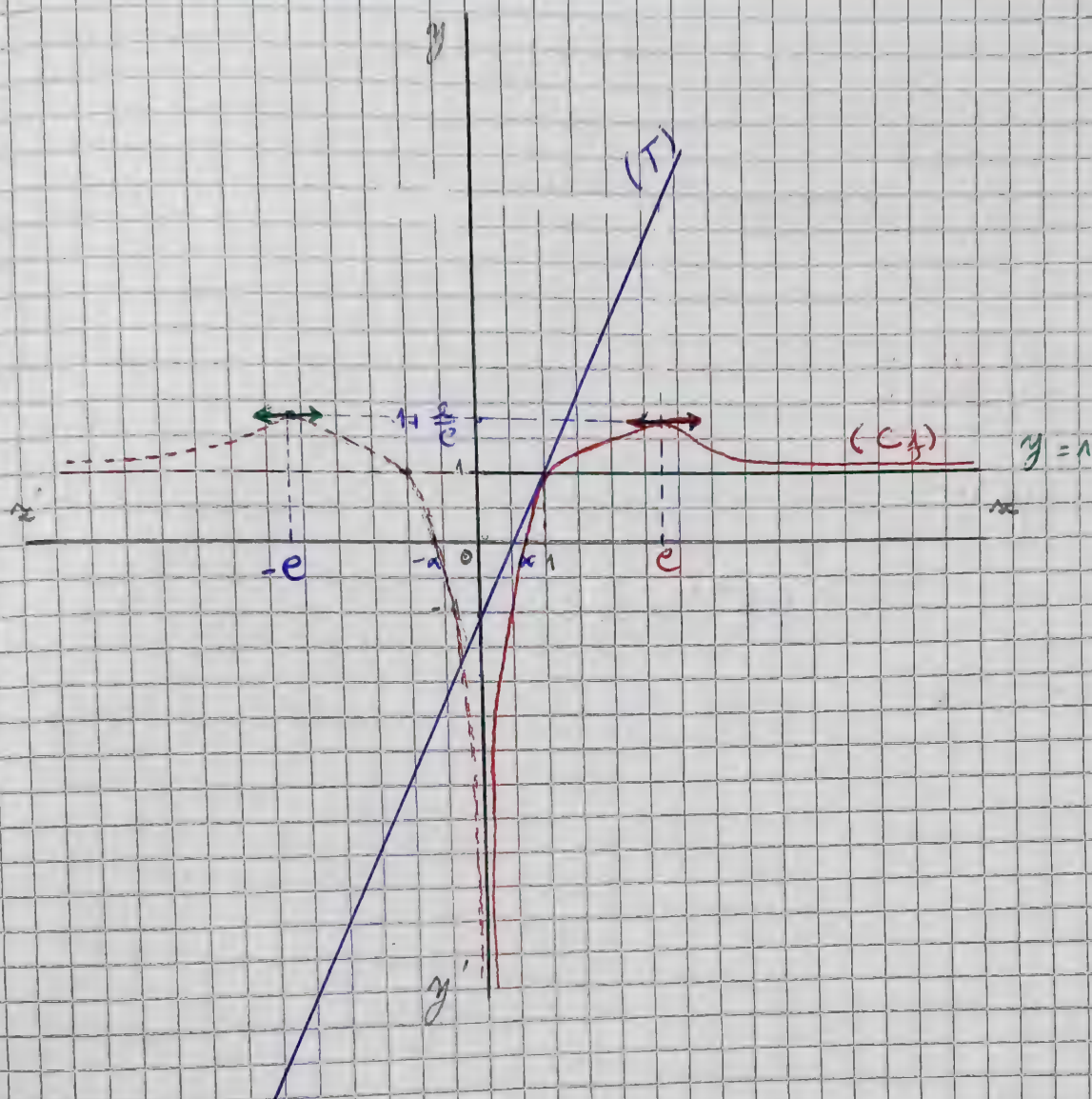
أي حسب مبرهنة القيم المتوسطة  $f(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  في

المجال  $[0,1]$

وبما أن  $f(e^{-0,4}) \times f(e^{-0,3}) < 0$  أي  $\begin{cases} f(e^{-0,4}) = -0,19 \\ f(e^{-0,3}) = 0,19 \end{cases}$

إذن  $f(x) = 0$  تقبل حلًا وحيدًا  $\alpha$  حيث  $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$





$x$	$-1$	$0$
$y = 2x - 1$	$-1$	$-1$

$$h(x) = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|} \quad \text{de } \mathbb{R} - \{0\} \text{ } h \text{ (4)}$$

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{بيان أن } h(x) - h(-x) = 0 \quad \text{حيث } x \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ من أجل}$$

$$h(-x) = 1 + \frac{2 \ln|-x|}{|-x|}$$

$$|-x| = |x| \quad \text{و } x \neq 0 \quad = 1 + \frac{2 \ln|x|}{|x|}$$

$$= h(x)$$



$$h(x) - h(-x) = 0$$

ومنه

إلى استنتاج

$h$  دالة زوجية لأن  $h(-x) = h(x)$  و  $(C_h)$  له محور تناظر  $(y/y')$

(ب) إنشاء  $(C_h)$  على  $(C_f)$

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{لأن} \quad h(x) = \begin{cases} 1 + \frac{e^{\ln x}}{x}; & x > 0 \\ 1 + \frac{e^{\ln(-x)}}{-x}; & x < 0 \end{cases}$$

من أجل  $x \in ]0, +\infty[$  لدينا  $h(x) = f(x)$  أي  $(C_h)$  منطبق على  $(C_f)$   
من أجل  $x \in ]-\infty, 0[$  لدينا  $(C_h)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(y/y')$

(ج) المناقشة بيانياً عدد حلول المعادلة  $\ln x^2 = (m-1)|x|$

من أجل  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  لدينا

$$\ln x^2 = (m-1)|x|$$

$$2 \ln |x| = (m-1)|x| \quad \text{نكتب}$$

$$\frac{2 \ln |x|}{|x|} = m-1$$

$$1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} = m$$

$$h(x) = m$$

$$\begin{cases} y = h(x) \\ y = m \end{cases}$$

(F)

حلول المعادلة المعطاة هي قوائم نقاط  $(x/y)$  تقاطع  $(C_h)$  مع المستقيم

$y = m$  الذي معادلته  $y = m$

(أ) إذا كان  $m \leq 1$  لدينا حلان

(ب) إذا كان  $1 + \frac{2}{e} < m < 1 + \frac{2}{e}$  لدينا 4 حلول

(ج) إذا كان  $m = 1 + \frac{2}{e}$  لدينا حلان متماثلان  $-e/e$

(د) إذا كان  $m > 1 + \frac{2}{e}$  لا توجد حلول



المعبر (76)

المعبر (1)

المعبر على  $[-1, +\infty]$

$E(1; 3, \ln 2)$   $B(-1; 1)$   $A(0; 3)$

$A$  مماس لـ  $(C)$  عند  $A$

$E$  مماس لـ  $(C)$  عند  $E$

① معادلة  $(AB)$

معادلة  $(AB)$  هي من الشكل  $y = ax + b$

$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ 3 = a(0) + b \end{cases}$  يعني  $A \in (AB)$

$b = 3$

$\begin{cases} y_B = ax_B + b \\ 1 = a(-1) + b \end{cases}$  يعني  $B \in (AB)$

$1 = -a + b$

$\begin{cases} -a + b = 1 \\ b = 3 \end{cases}$  حل الحالة

$a = 2$  أي  $-a + 3 = 1$

ومنه معادلة  $(AB)$  هي

$y = 2x + 3$

(2)

لنكن  $M(x, y)$  نقطة من المستوى

$\vec{AM} \parallel \vec{AB}$  يعني  $M \in (AB)$

أي  $(-2)(x - 0) = (-1)(y - 3)$

$-2x = -y + 3$  أي

$(AB): y = 2x + 3$

$\vec{AM} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$  لأن



معامل توجيه المماس (A) في A

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \\ f(1) &= 3 + \ln 2 \\ f'(0) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{1 - 3}{-1 - 0} \\ &= 2 \end{aligned}$$

معامل توجيه المماس (Δ) في E

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} \\ &= \frac{3 + \ln 2 - 3 - \ln 2}{0 - 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ج) عدد حلول المعادلة  $f(x) = 1$  هو 2 (حالتين)  $\left( \begin{matrix} x_1 = 0,5 \\ x_2 = 5,5 \end{matrix} \right)$

د) جدول تغيرات الدالة f

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	$-\infty$	$3 + \ln 2$	$-\infty$

هـ) f معرفة على  $[-1; +\infty[$  حيث  $f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$  حسب a و b

$$\begin{cases} 5 + b + \ln(0+1) = 3 \\ a + 5 + \frac{b}{2} + \ln 2 = 3 + \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 3 + \ln 2 \end{cases}$$

وبالتالي  $b = -2$  و  $a = -1$

$$f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$$



$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x + 3}{x+1} + \ln(x+1) \quad \text{الجزء (2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{نحتاج}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left[ \frac{-x^2 + 4x + 3}{x+1} + \ln(x+1) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \quad \text{نحتاج}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 4x + 3}{x+1} = -\infty$$

المستقيم الذي يعبر عن  $x = -1$  تقارب  $(C_f)$  بواسطة  $y/y$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)^2} \quad \text{نحتاج (2)}$$

فقطيل إلى مستقيم على  $]-1; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x+1) - 1(-x^2 + 4x + 3)}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4x + 1 + x^2 - 4x - 3 + x + 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)^2} \quad \text{نحتاج}$$

$$f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1) \quad \text{نحتاج (2)}$$

$$f'(x) = -1 + 0 - \left( -\frac{2}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1}$$

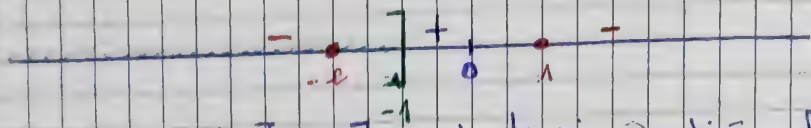
$$f'(x) = \frac{-(x+1)^2 + 2 + x + 1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)^2}$$



(ب) دراسة إشارة  $f'(x)$

$f'(x)$  له إشارة  $-x^2 - x + 2$  لأن  $(x+1)^2 > 0$   $\forall x \in ]-1, +\infty[$    
 فنراه هنا  $x < 1$



جـ - لدينا  $f$  متزايدة فائداً على  $] -1, 1[$    
 ومتناقصه فائداً على  $[1, +\infty[$  أي النتيجة تتوافق مع (أ)

د - ملاحظة  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1))$    
 حيث  $-\infty - \infty$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{-x+5}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

(د) تبين أن  $f(x) = 0$

نقبل حد ومبدأ  $x$  في  $[0, +\infty[$    
 بما أن  $f$  مستمرة ومتزايدة فائداً على  $[0, 1]$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 3 + \ln 2 \end{cases}$$

$$0 \in [f(0); f(1)]$$

إذن  $f(x) = 0$  ليس لها حلول في  $[0, 1]$    
 مستمرة ومتناقصه فائداً على  $[1, +\infty[$

$$\left( 0 \in ]-\infty; 3 + \ln 2[ \right) \text{ أي } \begin{cases} f(1) = 3 + \ln 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة  $f(x) = 0$  تقبل حد ومبدأ  $x$  في  $[1, +\infty[$



إعطاء قيمة مقربة  $\alpha$  إلى  $10^3$

نلاحظ أن البيان أن  $6.5 < \alpha < 7$

$$\begin{cases} f(6.5) = 0.24 \\ f(7) = -0.17 \end{cases}$$

ولذلك

$$f(6.75) = 0.03$$

$$f(6.875) = -0.06$$

التمرين (77)

(d) المستقيم المار بالنقطتين 0 و  $B(1;5)$  مماس لـ  $(\Gamma)$  في 0  
 إيجاد  $f(0)$ ،  $f'(0)$ ،  $f(2)$

لدينا

$$f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{y_B - y_0}{x_B - x_0} \\ &= \frac{5 - 0}{1 - 0} \\ &= 5 \end{aligned}$$

معامل توجيه المماس (د) المار بـ  $A(2, \frac{10}{e})$  و  $F(0, \frac{10}{e})$

$$F(0, \frac{10}{e})$$

$$f'(2) = \frac{y_A - y_F}{x_A - x_F}$$

$$= \frac{\frac{10}{e} - \frac{10}{e}}{2 - 0}$$

$$f'(2) = 0 \quad \text{أي}$$

إيجاد  $a$ ،  $b$ ،  $c$  حيث  $f(x) = (ax+b)e^{cx}$

نحسب  $f'(x)$

$f$  قابل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (مبدأ التفاضل)  $x \mapsto ax+b$   $x \mapsto e^{cx}$

$$x \mapsto e^{cx}$$

$$f'(x) = a e^{cx} + c e^{cx} (ax+b)$$

$$= (a + c(ax+b)) e^{cx}$$

$$f'(x) = (a + cax + cb) \cdot e^{cx}$$



$$(a + Ca(0) + cb)e^0 = 5 \quad \text{يعني} \quad f(0) = 5$$

$$a + cb = 5 \quad \text{أي}$$

$$(a(0) + b)e^0 = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(0) = 0$$

$$b = 0 \quad \text{أي}$$

$$(a + Ca(2) + cb)e^{2c} = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(2) = 0$$

$$a + 2ca + cb = 0$$

نحل المعادلات

$$\begin{cases} a + cb = 5 \\ b = 0 \\ a + 2ca + cb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = 5 \\ 5 + 2c \times 5 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 5x e^{-\frac{1}{2}x} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

3) المجال تغير ال دالة f

$$D_f = ]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x = -\infty \quad \text{أي} \quad = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x e^{-\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10t}{e^t}$$

$$= 0$$

$$x = 2t \quad \text{أي} \quad \frac{x}{2} = t \quad \text{أي} \quad \begin{matrix} x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow +\infty \end{matrix}$$

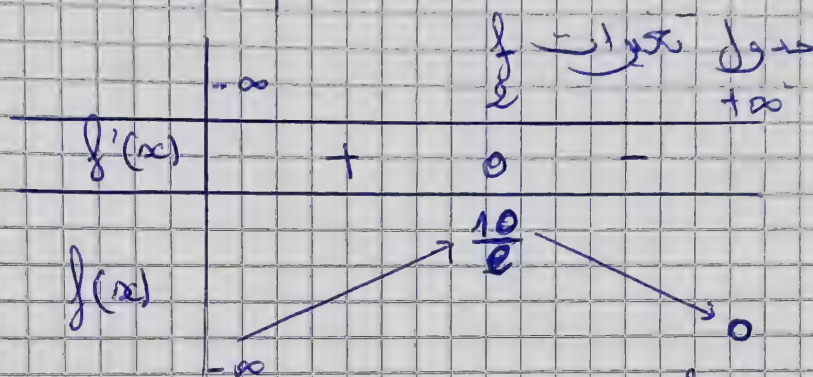


• لدينا  $f'(x) = (5 - \frac{1}{2} \times 5x + 0)e^{-\frac{x}{2}}$

$f'(x) = (5 - \frac{5}{2}x)e^{-\frac{x}{2}}$   
 إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $5 - \frac{5}{2}x$   $e^{-\frac{x}{2}} > 0$

$5 - \frac{5}{2}x = 0$  نحصل على  $x = 2$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$



$f(2) = 5 \times e^{-\frac{2}{2}}$   
 $f(2) = \frac{10}{e}$

التمرين (78)

في الدالة المعرفة بـ  $f(x) = 2 + \sqrt{1 - \ln x}$   
 1) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$

$f$  معرفة من أجل  $x > 0$   
 $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \ln x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ 1 > \ln x \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ \ln e > \ln x \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ e > x \end{cases}$

$D_f = ]0; e[$

وبالتالي



(2) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  وفرض النتيجة بيانياً

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + \sqrt{1 - \ln x})$$

أي  $\lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

المستقيم الذي معادله  $x=0$  مقام  $f(x)$

لـ  $(C_f)$  منطبق على  $(y/y)$

في كل الدالة  $f$  تقبل  $\Delta$  تتناقص على  $e$  وفرض النتيجة عند  $e$

$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = l$  تقبل  $\Delta$  تتناقص على  $e$  يعني

$$l \in \mathbb{R}$$

حيث

$$f(e) = 2 + \sqrt{1 - \ln e} = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{2 + \sqrt{1 - \ln x} - 2}{x - e}$$

$$\frac{0}{0} \text{ C.E.C.} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{x - e}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{\sqrt{1 - \ln x}}{(x - e)\sqrt{1 - \ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \ln x}{(x - e)\sqrt{1 - \ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \ln x}{x - e} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \ln x}}$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{1 - \ln x}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \left( - \frac{\ln x - 1}{x - e} \right) \quad ! \text{ C.E.C.}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}$$

$$g(x) = \ln x$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

حيث

$$= - \lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x) - g(e)}{x - e}$$

$$= - g'(e)$$

$$= - \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = -\infty$$

أي

ومنه  $f$  لا تقبل  $\Delta$  تتناقص على  $e$



التقريب الهندسي

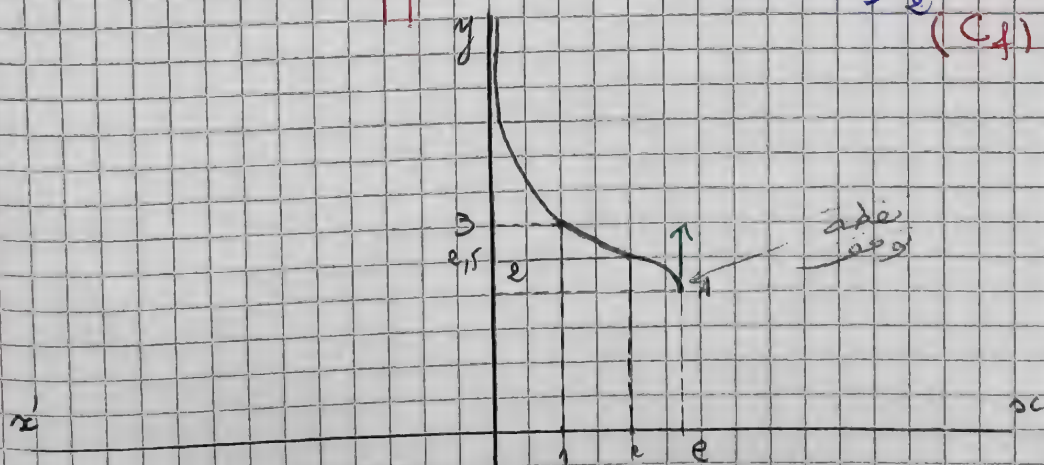
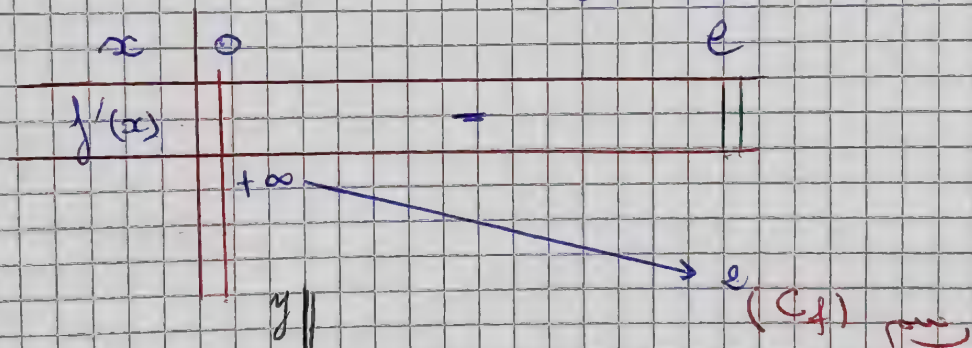
يوجد نصف مستقيم  $(C_f)$  على يسار النقطة  $A(e; 2)$  يوازي  $(x/y)$   
 (4) أدريس انحاء تحقق  $f$  ثم شكل جدول متغيراتها  
 في تقبل الاستنتاج على  $]0; e[$

ولدينا

$$f(x) = 0 + \frac{-\frac{1}{x}}{e\sqrt{1-\ln x}}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{e\sqrt{1-\ln x}}$$

نلاحظ ان  $f'(x) < 0$  على  $]0; e[$   
 لان  $-\frac{1}{x^2} < 0$  و  $e\sqrt{1-\ln x} > 0$   $\forall x \in ]0; e[$  ومنه  $f$  متناقصة  
 دائماً على  $]0; e[$   
 جدول تغيرات  $f$





في الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-3}$$

أ) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$

معرفة من أجل  $x - 3 \geq 0$

أي  $x \geq 3$

ومنه  $D_f = [3; +\infty[$

ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على  $\mathbb{R}^+$

لتقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}^+$  يعني  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = l$

حيث  $l$  عدد حقيقي

$$\begin{aligned} f(3) &= 3 - 2\sqrt{3-3} = 3 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2\sqrt{x-3} + 3}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{(x-3) + 3 - 2\sqrt{x-3}}{x-3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ 1 - \frac{2\sqrt{x-3}}{(x-3)\sqrt{x-3}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{x-3}} \right] \end{aligned}$$

أي  $f$  لا تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}^+$

ب) فمثل النتيجة هندسيا

بوجود تعق صفا  $A(3; f(3))$  على  $\mathbb{R}^+$  يعني النقطة  $A(3; f(3))$  ياتي  $(y'/y)$

ج) ادرس تغيرات الدالة  $f$

هـ) لدينا  $f(3) = 3$  أي  $A(3; 3)$  نقطة توقف

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x-3}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 2\sqrt{x-3})(x + 2\sqrt{x-3})}{x + 2\sqrt{x-3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (2\sqrt{x-3})^2}{x + 2\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 12}{x + 2\sqrt{x-3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2\sqrt{x-3}}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{1 + \frac{2\sqrt{x-3}}{x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= +\infty \\
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x-3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 2\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 2x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 - 2\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} \right]
 \end{aligned}$$

لا تقبل الاشتقاق على  $[3, +\infty[$  ولدينا

$$f'(x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-3} - 1}{\sqrt{x-3}}$$

$$\sqrt{x-3} - 1 \quad \text{لـ } f'(x) \text{ اشتقاق}$$

$$\sqrt{x-3} - 1 = 0 \quad \text{يعني} \quad \sqrt{x-3} = 1$$

$x-3=1$  نحل ترتيب الطرفين الموجبة



$$x=4$$

$$\sqrt{x-3} > 1 \quad \text{يعني} \quad \sqrt{x-3} - 1 > 0$$

$$x-3 > 1$$

$$x > 4$$

$x$	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+

$[4; +\infty[$  ف متزايدة تمامًا على

$[3; 4]$  ومتناقصة تمامًا على

(د) ادرّس تغيرات الدالة  $f$

$x$	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	3		$+\infty$	

$$f(4) = 4 - 2\sqrt{4-3}$$

$$f(4) = 4 - 2 = 2$$

أن ادرّس (د) متغير الدالة  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{لأنه نكتب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2\sqrt{x-3}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2\sqrt{x-3}}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad = 1$$

$$a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \quad \text{نحسب}$$

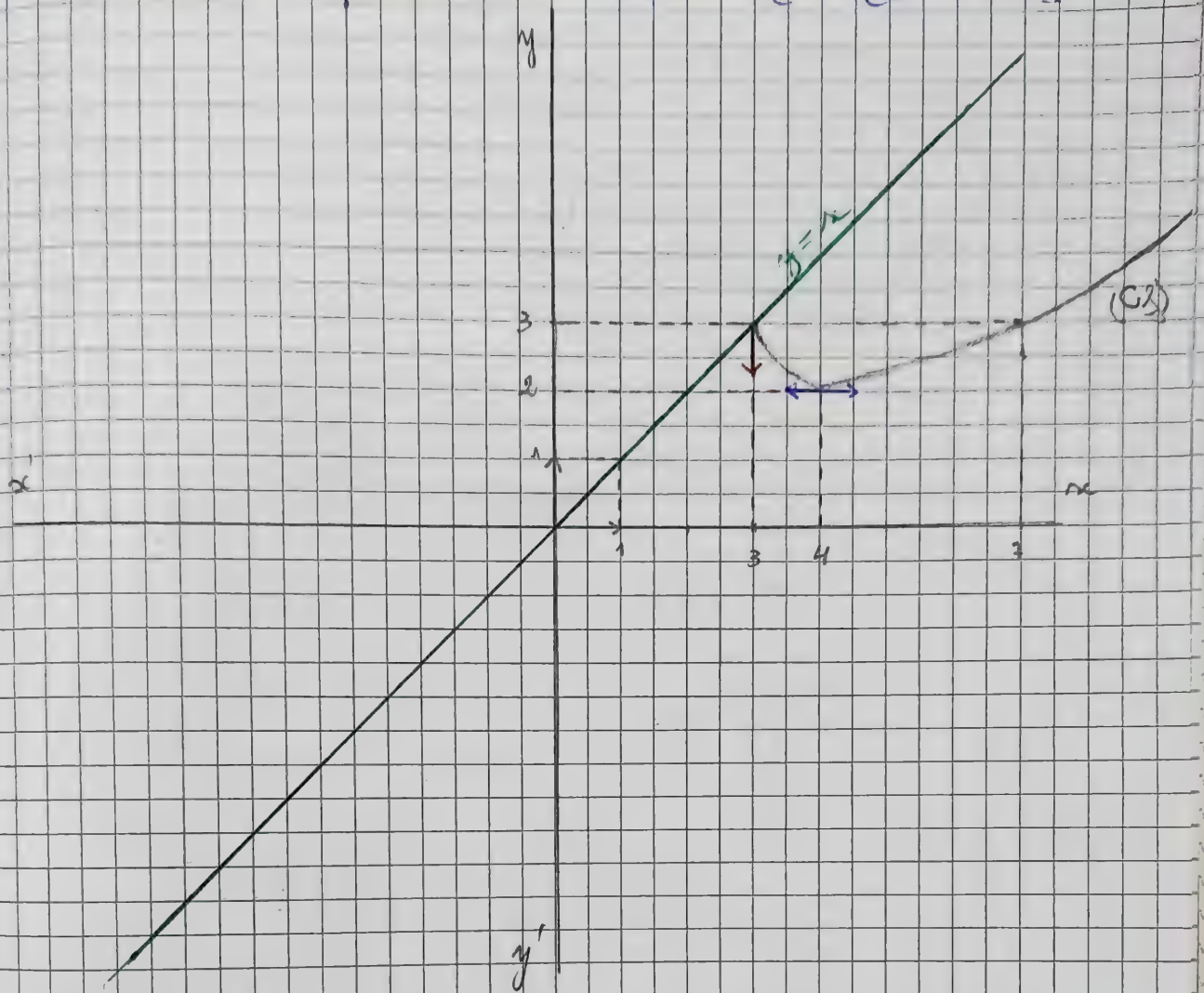
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x-3} - x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2\sqrt{x-3})$$

$$= -\infty$$



لأنه يوجد فرع قطع مكافئ بإختار المستقيم الذي معادلته  $y=x$



التحريك (20)

ف الى الـ المعرفه على  $[1; +\infty[$

$$f(x) = e + (x-1) \ln(x-1)$$

ادرس تغيرات الـ الى الـ ف تم انشئ (C2) نصيلا البيانى :

$$D_f = ]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [e + (x-1) \ln(x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x-1) = 0$$

نقطة نهاية  $A(1, 2)$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e + (x-1) \ln(x-1)]$$

$$= +\infty$$

ف. قبل الدالة تتزايد على  $[1; +\infty[$  (زيادة دالة  $x \mapsto x-1$ )  
 $x \mapsto \ln(x-1)$

$$f'(x) = 0 + 1 \times \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} \times (x-1)$$

$$f'(x) = \ln(x-1) + 1$$

نريد إشارة  $f'(x)$

$$\ln(x-1) + 1 = 0 \quad \text{أو} \quad f'(x) = 0$$

$$\ln(x-1) = -1$$

$$x-1 = e^{-1}$$

$$x-1 = \frac{1}{e}$$

$$x = 1 + \frac{1}{e}$$

$$\ln(x-1) + 1 > 0 \quad \text{أو} \quad f'(x) > 0$$

$$\ln(x-1) > -1$$

$$x-1 > e^{-1}$$

$$x-1 > \frac{1}{e}$$

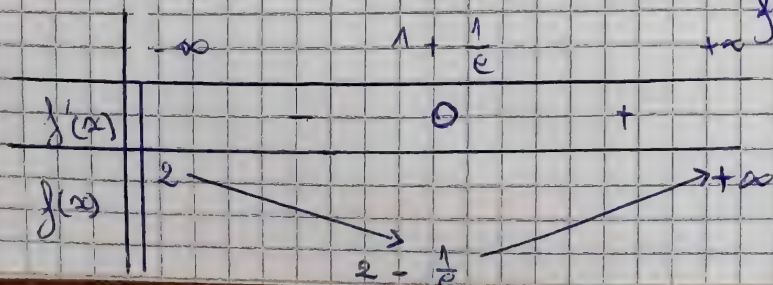
$$x > 1 + \frac{1}{e}$$

أي:

$x$	1	$1 + \frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	

ف. متزايدة صاعداً على  $[1 + \frac{1}{e}; +\infty[$   
 ف. متناقصة صاعداً على  $]1; 1 + \frac{1}{e}]$

جدول تغيرات  $f$





$$\begin{aligned} f\left(1 + \frac{1}{e}\right) &= 2 + \left(1 + \frac{1}{e} - 1\right) \ln\left(1 + \frac{1}{e} - 1\right) \\ &= 2 + \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{e} \\ \ln\left(\frac{1}{e}\right) &= -\ln e = -1. \end{aligned}$$

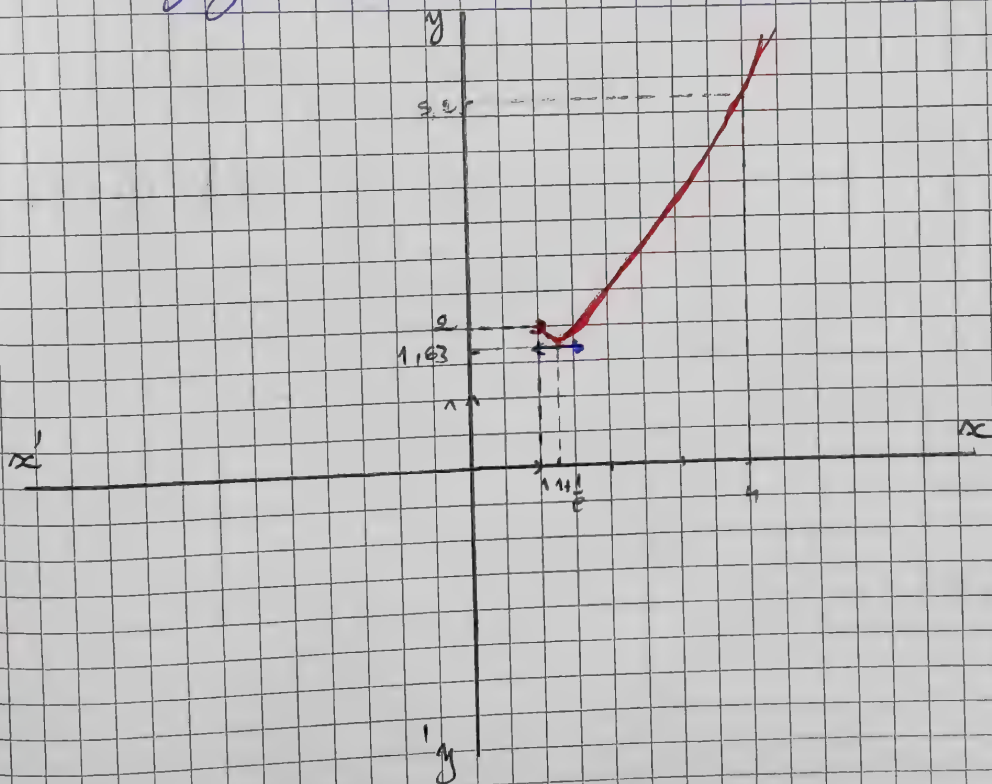
رسم (C)

علاوة على ذلك إذا حسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

علاوة على ذلك إذا حسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + (x-1) \ln(x-1)}{x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2}{x} + \frac{x-1}{x} \ln(x-1) \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

إذاً يوجد فرع قطع مكافئ باتجاه  $(y', y)$ .





المترين (8.1)

الدالة المعروفة :

$$f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$$

الدالة متصوفة بتعريف الدالة

في مترين من أصل  $x-2 \gg 0$

أو  $x \geq 2$

$$D_f = [2, +\infty[$$

عناهل الدالة لا تقبل الاشتقاق على  $x=2$  ؟

في تقبل الاشتقاق على  $x=2$  معناه  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = l \in \mathbb{R}$

$$f(2) = 3 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 + \sqrt{x-2} - 3}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x-2} ; \left( \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-2} \sqrt{x-2}}{(x-2) \sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2) \sqrt{x-2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$= +\infty$$

أو  $f$  لا تقبل الاشتقاق على  $x=2$

(ب) نفس النتيجة عند  $x=2$

النقطة  $A(2, 3)$  يوازي  $y'y$

يوجد نصف مماس لـ  $(C_f)$  على  $x=2$

(ج) انفسا تعبيرات الدالة  $f$

$$D_f = [2, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \sqrt{x-2})$$

$$= +\infty$$

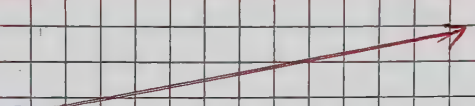
النقطة  $A(2, 3)$  نقطة توقف



من أجل تحقيق الحد التوافقي على  
والحد

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

نلاحظ أن  $f'(x) > 0$   $\forall x \in [2; +\infty[$   
أي  $f$  متزايدة تمامًا على  $[2; +\infty[$   
حدول التغيرات

$x$	2		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	3		

4) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  - إذا تيسر

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \sqrt{x-2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{x} + \frac{\sqrt{x-2}}{x} \right) \end{aligned}$$

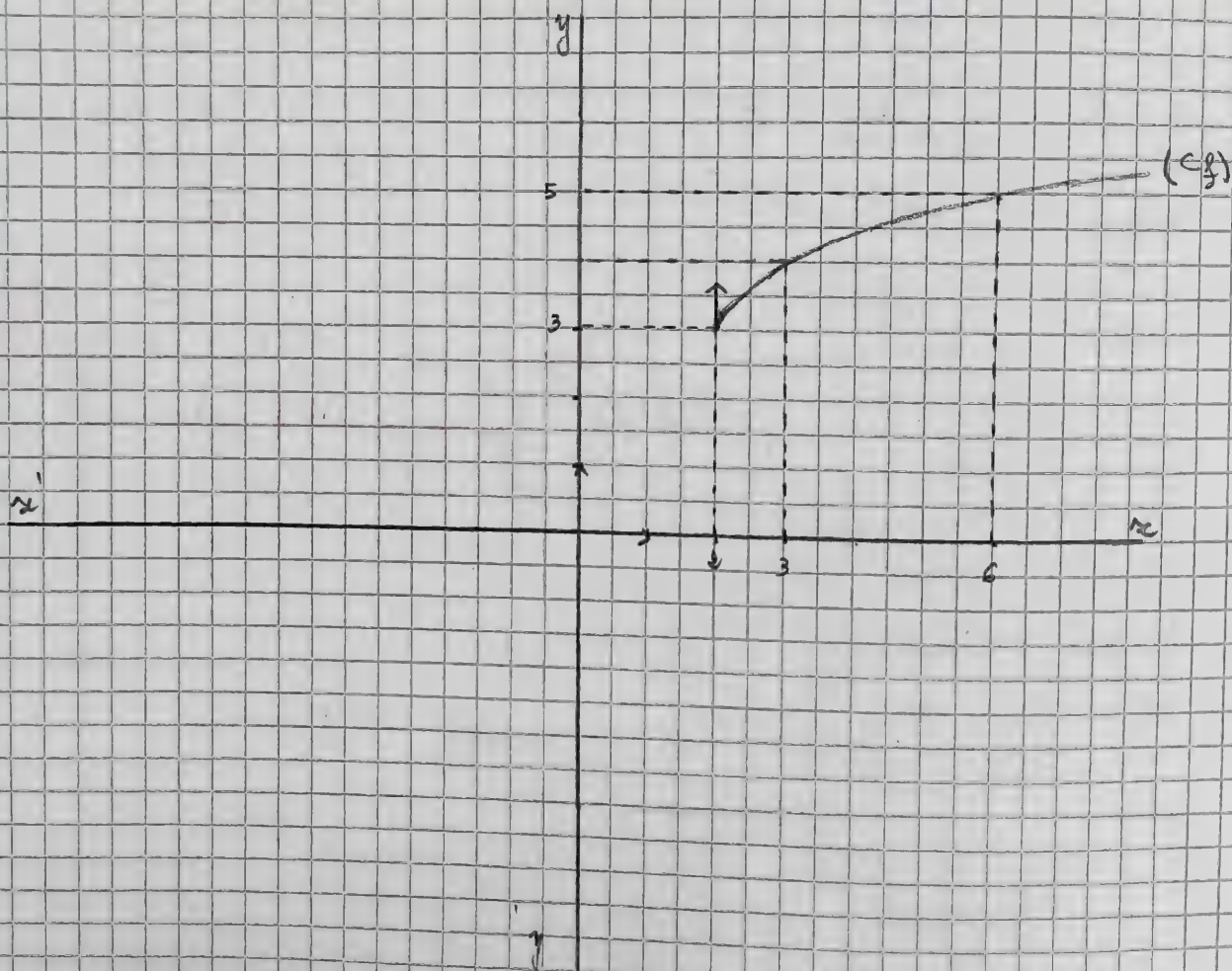
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{و} \quad 0 \cdot \infty = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2} \times \sqrt{x-2}}{x \sqrt{x-2}} \quad (\text{و}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x \sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x-2}} \\ &= 1 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

مثال ١٠  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  إذا وجد فرع قطع مكا في  $(x, f(x))$



نقاط مسلسلة

$x$	3	6
$f(x)$	3	5



المعادلة التفاضلية من الشكل  $y' = ay + b$   
 حيث  $a \neq 0$

① المعادلة التفاضلية  $y' = ay$  حيث  $a \neq 0$   
 (مبسطة)

$a$  عدد حقيقي غير معدوم  
 الحل على  $\mathbb{R}$  للمعادلة التفاضلية  $y' = ay$  هي الدوال  $x \mapsto C e^{ax}$   
 حيث  $C$  عدد حقيقي ثابت كفي

② المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  حيث  $a \neq 0$   
 (مبسطة)

الحل على  $\mathbb{R}$  للمعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  هي الدوال  $x \mapsto C e^{ax} - \frac{b}{a}$   
 حيث  $C$  عدد حقيقي ثابت كفي

المترين ②

حل المعادلة التفاضلية  $2y' + y = 0$

عني الحل الخاص  $f$  الذي يحقق  $f(\ln 4) = 1$

(1)  $2y' + y = 0$  نكتب  $y' = -\frac{1}{2}y$

معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = ay$  حيث  $a = -\frac{1}{2}$

وهذه حلول هذه المعادلة على  $\mathbb{R}$

هي الدوال  $x \mapsto C e^{-\frac{1}{2}x}$   
 $f(x) = C e^{-\frac{1}{2}x}$  (2)

فإن  $f(\ln 4) = 1$   
 نكتب  $f(\ln 4) = 1$

$C e^{-\frac{1}{2} \ln 4} = 1$   
 $C e^{-\ln 2} = 1$   
 $C e^{\ln \frac{1}{2}} = 1$

$\frac{1}{2} \ln 4 = \ln \sqrt{4} = \ln 2$



أب  $\frac{1}{2}C = 1$  أي  $C = 2$

وسه  $f(x) = e e^{-\frac{1}{2}x}$

التمرين 83

( $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ) معام متعامد ومتجانس للفضاء  
نعتبر النقط:

$A(3; -2; 4)$

$B(1; 0; -5)$

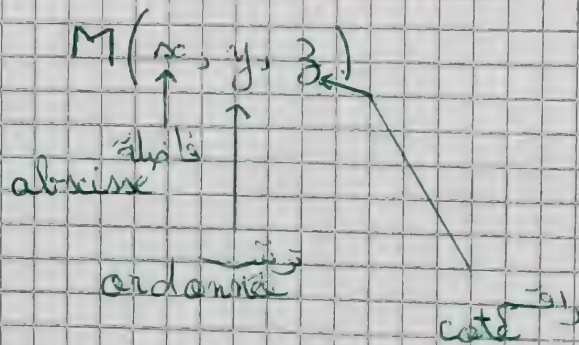
$C(4; -1; 6)$

① عين إحداثيات (أو المركبات السالبة) للأشعة  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  و  $\vec{BC}$

② احسب إحداثيات I منتصف  $[BC]$

③ احسب الأحوال  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$

④ هل الشعاعان  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  مرتبطان خطياً؟



إحداثيات (أو المركبات السالبة) للشعاع

$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$  أي  $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

① تعيين إحداثيات  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  و  $\vec{BC}$

لدينا:  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$  أي  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-(-2) \\ -5-4 \end{pmatrix}$



لدينا

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-2) \\ 6-4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-0 \\ 6-(-5) \end{pmatrix}$$



$[AB]$  منتصف  $I$

إحداثيات  $I$  هي

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$[BC]$  منتصف  $I$

لدينا

$$I \left( \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ هي } \begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0+(-1)}{2} = -\frac{1}{2} \\ z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{-5+6}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$[AB]$  المسافة بين نقطتي  $A$  و  $B$  (أو طول القطعة)



$$AB = BA$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

حساب  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-9)^2}$$

$$AB = \sqrt{89} \text{ أي}$$



لدينا

$$AC = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2 + (z_c - z_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2}$$

$$AC = \sqrt{6} \quad \text{أي:}$$

$$BC = \sqrt{(x_c - x_B)^2 + (y_c - y_B)^2 + (z_c - z_B)^2}$$

$$BC = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (1)^2}$$

$$BC = \sqrt{13}$$

يعني  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطان خطيًا

يوجد عدد حقيقي  $k$  حيث  
 $\vec{v} = k \vec{u}$

يعني  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطان خطيًا يعني:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} \quad \text{حيث } x' \neq 0, y' \neq 0, z' \neq 0$$

(4) لدينا:  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$  غير مرتبطان خطيًا لأن  $\frac{-2}{1} \neq \frac{2}{1}$

أو:

$$\begin{aligned} x y' &= x' y \\ x z' &= x' z \\ y z' &= y' z \end{aligned}$$

AB



المعريف (84)

معلم متعامد ومتجانس الفضاء  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$A(2; 0; 1)$$

$$B(3; 2; 0)$$

$$C(-1; -2; 4)$$

نعتبر النقطة

تحقق أن النقط  $A, B, C$  ليست في استقامة



$A, B, C$  في استقامة يعني  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$

متجهان  
خطيا

$A, B, C$  ليست في استقامة يعني  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير متطابقين خطيا

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  غير متطابقين خطيا لأن  $-\frac{3}{1} \neq -\frac{2}{2}$

ومنه  $A, B, C$  ليست في استقامة

معلم متعامد ومتجانس الفضاء  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ و } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$$

العبارة التحليلية للجداء الداخلي

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

حيث  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$



التمرين (85)

( $e_1, e_2, e_3$ ) معام متعامد ومتجانس الفضاء  
نعتبر النقطة

$$A(1; 0; 2)$$

$$B(0; 2; 1)$$

$$C(2; 1; 3)$$

ما طبيعة المثلث ABC ؟

نحسب الأطوال  $\vec{AB}$  ،  $\vec{AC}$  و  $\vec{BC}$

لدينا

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

$$AB^2 = (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2 = 6$$

$$AC^2 = (2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-2)^2 = 3$$

$$BC^2 = (2-0)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2 = 9$$

بما أن

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

إذن ABC

مثلث قائم في A

التمرين 86

( $e_1, e_2, e_3$ ) معام متعامد ومتجانس الفضاء

نعتبر النقطة

$$A(1; 0; 2)$$

$$B(0; 2; 1)$$

$$C(2; 1; 3)$$

بين أن ABC مثلث قائم في A

ABC مثلث قائم في A يعني  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  متعامدان أي

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

لدينا

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

إذن

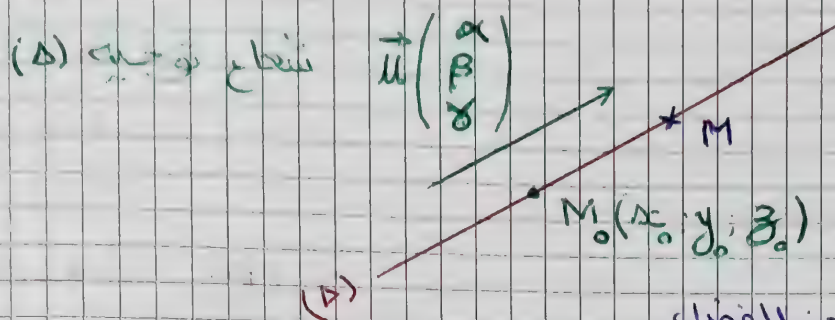
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (1)(-1) + (1)(2) + (1)(-1) = 0$$

وهذا ABC مثلث قائم في A



التمرين ٨٦

تمثيل وسيطي لمستقيم



لنكن  $M(x, y, z)$  من الفضاء

$M \in (\Delta)$  معناه  $\vec{M_0M} // \vec{u}$

أي  $\vec{M_0M} = k \vec{u}$  مع  $k \in \mathbb{R}$

ومنه:

$$\begin{cases} x = k\alpha + x_0 \\ y = k\beta + y_0 \\ z = k\gamma + z_0 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

تمثيل وسيطي لمستقيم (Delta) شعاع توجيهه  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  ويشمل النقطة

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

التمرين ٨٧

$(k; \alpha; \beta; \gamma; z_0)$  معلم متعامد ومتجانس

للفضاء، عين تمثيلية وسيطية للمستقيم (Delta) الذي يشمل النقطة  $A(5; -2; 3)$

و  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه له

لنكن  $M(x, y, z)$  نقطة من الفضاء

$M \in (\Delta)$  يعني  $\vec{AM} = k \vec{u}$  حيث  $k \in \mathbb{R}$

ومنه تمثيل وسيطي (Delta) هو:

$$\begin{cases} x = 4k + 5 \\ y = -2k - 2 \\ z = k + 3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

هل النقطة  $B(9; -4; 4)$  تنتمي إلى المستقيم (Delta) ؟



$$B \in (\Delta) \text{ يعني } \begin{cases} x_B = 4k + 5 \\ y_B = -2k - 2 \\ z_B = k + 3 \end{cases} \text{ تقبل حل وحيداً}$$

$$\text{أي } \begin{cases} x = 4k + 5 \\ -4 = -2k - 2 \\ 4 = k + 3 \end{cases} \text{ تقبل حل وحيداً}$$

$$\text{نما أن } \begin{cases} k = 1 \\ -4 = -2(1) - 2 \\ 4 = 1 + 3 \end{cases} \begin{matrix} \text{(محققة)} \\ \text{(محققة)} \end{matrix} \text{ إذن } B \in (\Delta)$$

(2)  $B \in (\Delta)$  يعني  $\vec{AB}$  و  $\vec{ll}$  مرتبطان خطياً  
لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{ll} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  أي  $\vec{AB} = \vec{ll}$   
ومنه  $B \in (\Delta)$

(3) هل النقطة  $E(3; -7; 2)$  تنتمي لـ  $(\Delta)$   
 $E \in (\Delta)$  معناه  $\vec{AE}$  و  $\vec{ll}$  مرتبطان خطياً  
لدينا  $\vec{AE} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{ll} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطياً  
لأن  $\frac{4}{-2} \neq \frac{-2}{-5}$   
ومنه  $E \notin (\Delta)$

(4)  $E \in (\Delta)$  يعني المعادلة  $\begin{cases} 3 = 4k + 5 \\ -7 = -2k - 2 \\ 2 = k + 3 \end{cases} \text{ تقبل حل وحيداً}$

$$\text{نما أن } \begin{cases} 3 = 4(-1) + 5 \\ -7 = -2(-1) - 2 \\ k = -1 \end{cases} \begin{matrix} \text{(غير محققة)} \\ \text{(غير محققة)} \end{matrix} \text{ إذن } E \notin (\Delta)$$

(4) عن معادلات ديكارتية للمستقيم  $(\Delta)$



التد  
)  
( $\Delta$ )  
( $\mathbb{R}$ )

$$\begin{cases} \frac{x-5}{4} = k \\ \frac{y+2}{-2} = k \\ \frac{z-3}{1} = k \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} x = 4k + 5 \\ y = -2k - 2 \\ z = k + 3 \end{cases}$$

لدينا  $k \in \mathbb{R}$

ومنه معادلات ديكارتية لـ (D) هي

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$$

التمرين (29)

(D) مستقيم معرف كمائلي

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{6}$$

1- عين تمثيلية وبيضية لـ (D)

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{نضع} \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{6} = t$$

ومنه تمثيل وبيضية

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t + 7 \\ z = 6t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(D) عين شعاعاً توجيهها  $\vec{u}$  للمستقيم (D)

لدينا  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه لـ (D)

التمرين (29)

(D) مستقيم معرف كمائلي

نعتبر النقطتين

$A(3, -2, 5)$  و  $B(1, 0, 4)$

عين تمثيلية وبيضية للمستقيم (AB)

لدينا  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه للمستقيم (AB)

إذن تمثيل وبيضية لـ (AB) هو:

$$\begin{cases} x = -2k + 3 \\ y = 2k - 2 \\ z = -1k + 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$



التمرين ٥٥

$(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معطى متعامد ومتجانس للفضاء

$(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  مستقيمان من الفضاء معطيان بتعريفهما الدائريين التاليين :

$$(\Delta_1): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

عني إحداثيات النقطة  $B$  تقاطع المستقيمين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  .  
إحداثيات  $B$  هو حلول الجملة :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \\ x = 1 \\ y = -1 - t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$$

نحل الجملة

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 \\ -2 - 2t = -1 - t' \\ 1 - t = 4 + 2t' \end{cases}$$

$$t = -1$$

$$3 + 2t = 1 \text{ نجد}$$

$$t' = -1 \text{ نجد } -2 - 2t = -1 - t'$$

$$P \quad 1 - t = 4 + 2t' \text{ حل } t = -1 \text{ و } t' = -1$$

$$1 - (-1) = 4 + 2(-1) \text{ محققة}$$

$$\text{ومن ثم } (\Delta_1) \text{ يقطع } (\Delta_2) \text{ في } B(1; 0; 2)$$



لأن من أجل  $t = -1$  لدينا

$$\begin{cases} x = 3 + 2(-1) = 1 \\ y = -2 - 2(-1) = 0 \\ z = 1 - (-1) = 2 \end{cases}$$

التمرين ٩٨

محيط النقط  $A(1; -3; -2)$

$B(-5; 1; 3)$

$C(-1; 1; 1)$

اكتب معادلة وسيطة

(a) المستقيم  $(AB)$

(b) القطعة  $[BC]$

(c) لنصف المستقيم  $[AC]$

(a) تمثيل وسيطي لـ  $(AB)$

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه  $(AB)$

$M(x, y, z) \in (AB)$  يعني  $\vec{BM} = t\vec{AB}$  مع  $t \in \mathbb{R}$

أي تمثيل وسيطي لـ  $(AB)$  هو:

$$\begin{cases} x = -6t + 5 \\ y = 4t + 1 \\ z = 5t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

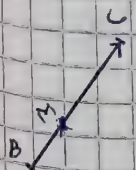
(b) تمثيل وسيطي لـ  $[BC]$

لدينا  $\vec{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه  $[BC]$

$M(x, y, z) \in [BC]$  معناه  $\vec{BM} = k\vec{BC}$  حيث  $0 \leq k \leq 1$

أي تمثيل وسيطي لـ  $[BC]$  هو:

$$\begin{cases} x = 4k - 5 \\ y = 1 \\ z = -2k + 3 \end{cases} \quad 0 \leq k \leq 1$$





(C) تعميل و بسيط لـ  $[AC]$   
 لدينا  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه  $[AC]$

$h \geq 0$  حيث  $\vec{AM} = h \times \vec{AC}$  يعني  $M(x, y, z) \in [AC]$   
 أي تعميل و بسيط لـ  $[AC]$  هو:

$$\begin{cases} x = -2h + 1 \\ y = 4h - 3 \\ z = 3h - 2 \end{cases} \quad (h \geq 0)$$

التمرين 9

حل المسئلة جان:

$$(D) \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + 2k \\ z = 3 - k \end{cases} \quad \text{و} \quad (D') \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$$

متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوى ؟ ندرس

ليكن  $\vec{d} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه (D)

$\vec{d'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه (D')

بما أن  $\frac{2}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1}$  إذن  $\vec{d}$  و  $\vec{d'}$  غير مرتبطين خطيًا أي (D) و (D')

ومنه إما (D) يقطع (D') وإما (D) و (D') ليسا من نفس المستوى -

امتناع نقطة تقاطع (D) و (D') (إن وجدت)

حلول الجملة:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \\ x = 3 + k \\ y = 1 + 2k \\ z = 3 - k \end{cases}$$



نحل الجملة

$$\begin{cases} 3 + 2t = 3 + k & (1) \\ 3 + t = 1 + 2k & (2) \\ k = 3 - k & (3) \end{cases}$$

حسب (3) فإن (2) تصبح

$$3 + 3 - k = 1 + 2k$$

$$k = \frac{5}{3} \text{ أي } 5 = 3k$$

ومنه

$$t = 3 - \frac{5}{3}$$

$$t = \frac{4}{3}$$

نتحقق من صحة (1)

$$3 + 2\left(\frac{4}{3}\right) = 3 + \frac{5}{3}$$

لدينا:

إذن (D) لا يقطع (D') ومنه (D) و (D') ليسا من نفس المستوى

التمرين (93)

بي أن (D) و (D') مستقيمان متوازيان

$$(D): \begin{cases} x = 4 - 2k \\ y = 2 + kt \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D'): \begin{cases} x = -2h \\ y = 1 + 4h \\ z = h \end{cases} \quad (h \in \mathbb{R})$$

ليكن  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه (D)

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه (D')

حيث أن  $\vec{u} = \vec{v}$  إذن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مرتبطان خطياً ومنه (D) // (D')

هل (D) يوازي (D') تماماً ؟  
هل (D) منطبق على (D') ؟

ليكن  $A(4; 2; 0)$  نقطة من (D) (من أجل  $t=0$ )  
هل  $A \in (D')$  ؟



$$AE(D) \text{ يعني } \begin{cases} 4 = -2h \\ 2 = 1 + 4h \\ 0 = h \end{cases} \text{ فصل واحدًا}$$

$$A \notin (D) \text{ إذن } \begin{cases} 2 = 1 + 4(0) \\ h=0 \end{cases} \text{ دوماً أن } \begin{cases} 2 = 1 + 4(0) \\ h=0 \end{cases} \text{ عن ملاحظة}$$

ومنه (D) و (D') متوازيان تماماً

التمرين (94)

نريد أن (D) و (D') مستقيمان منطبقان

$$(D) : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$(D') : \begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$$

$$\text{ليكن } \vec{d} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \text{ شعاع توجيه (D)}$$

$$\vec{d'} \left( \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \text{ شعاع توجيه (D')}$$

$$\text{بما أن } \frac{5}{5} = \frac{-1}{-1} = \frac{-4}{-4} \text{ إذن } \vec{d} \text{ و } \vec{d'} \text{ متجهان خطيا ومنه (D) // (D')}$$

لتكن A(-1; -3; 0) نقطة من (D) (من أجل t=0)

$$A \in (D')$$

$$AE(D') \text{ يعني } \begin{cases} -1 = 9 + 5k \\ -3 = -5 - k \\ 0 = -8 - 4k \end{cases} \text{ فصل واحدًا}$$

$$\text{نلاحظ أن } \begin{cases} -1 = 9 + 5(-2) & (\text{محققة}) \\ -3 = -5 - (-2) & (\text{محققة}) \\ k = -2 \end{cases} \text{ إذن } A \in (D')$$

ومنه (D) و (D') متطابقان



التمرين (35)

بين أن (D) و (D') متقاطعان

$$(D): \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(D'): \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = -1 + 4k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

لكي  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه (D)

$\vec{u}' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه (D')

بما أن  $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-1}$  إذن  $\vec{u}$  و  $\vec{u}'$  غير مرتبطين خطياً ومنه (D)  $\nparallel$  (D')  
إحداثيات نقطة تقاطع هي حلول

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \\ x = k \\ y = 1 - k \\ z = -1 + 4k \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ و } k \in \mathbb{R}$$

نحل الحالة

$$\begin{cases} -3 + 2t = k & (1) \\ 2 - t = 1 - k & (2) \\ 1 + t = -1 + 4k & (3) \end{cases}$$

نحسب (1) فإن (2) تصبح

$$2 - t = 1 - (-3 + 2t)$$

$$2 - t = 1 + 3 - 2t$$

$$2t - t = 1 + 3 - 2$$



$$t = 2 \quad \text{أي} \\ x = -3 + 2(2)$$

$$k = 1 \quad \text{أي}$$

نتحقق من صحة (3)

$$(1) \quad 1 + 2 = -1 + 4 \quad \text{أي} \quad (3) \text{ محققة ومنه (D) يقطع (D) في}$$

النقطة

$$A(1; 0; 3)$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2(2) = 1 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases} \quad \text{لأن من أجل } t=2 \text{ لدينا}$$

معادلة ديكارتية لمستوي (P)

في الشكل

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{متعامد على المستوي (P)} \quad \text{حيث}$$

التقريب 96

عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يحتوي النقطة

$$A(5; 2; -1) \quad \text{و} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{متعامد على المستوي (P)}$$

$$\text{أي} \quad \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{متعامد على المستوي (P)} \quad \text{إذن معادلة (P) هي}$$

الشكل

$$3x + 4y - 6z + d = 0$$

وبما أن  $A \in (P)$  إذن

$$3(5) + 4(2) - 6(-1) + d = 0$$

$$15 + 8 + 6 + d = 0$$

$$d = -29 \quad \text{أي}$$



ومنه معادلة (P) هي

$$(P) : 3x + 4y - 6z - 23 = 0$$

التمرين 37

عبر معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الموازي للمستوي (P) ذو المعادلة

$$-3x + y - 3z + 7 = 0 \text{ ويمثل النقطة } A(0, 2, -2)$$

$$\text{ليكن : } \vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناطقي لـ (P)}$$

بما أن (Q) // (P) إذن  $\vec{n}$  شعاع ناطقي لـ (Q)

أي معادلة (Q) هي من الشكل

$$-3x + y - 3z + d = 0$$

و بما أن  $A \in (Q)$  إذن

$$-3x_A + y_A - 3z_A + d = 0$$

$$-3(0) + 2 - (-2) + d = 0$$

$$d = -4$$

$$\text{ومنه معادلة ديكارتية لـ (Q) هي } -3x + y - 3z - 4 = 0$$

ط 2) بما أن (Q) // (P) إذن  $\vec{n}$  هو أيضا شعاع ناطقي لـ (Q)

$M(x, y, z) \in (Q)$  معناه  $\vec{AM} \perp \vec{n}$

$$\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ أي}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{AM} \begin{pmatrix} x-d \\ y-2 \\ z+2 \end{pmatrix} = 0 \text{ أي } -3x + 1(y-2) + (-1)(z+2) = 0$$

$$(Q) : -3x + y - 3z - 4 = 0$$

التمرين 38

عبر معادلة ديكارتية للمستوي المموري (P) للقطعة [AB]

$$A(3, -1, 2)$$

حيث

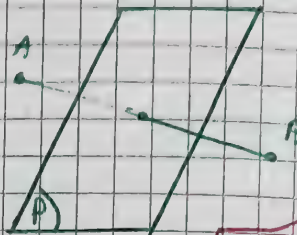
$$B(-4, 2, 0)$$



نعرف المستوى المحوري للقطعة  $[AB]$  هو المستوى العمودي على  $[AB]$  في منتصفها

(P) مستوى محوري لـ  $[AB]$  معناه  $\vec{AB}$  متعامد تام على لـ (P)

في  $I \in (P)$  حيث I منتصف  $[AB]$



بما أن (P) هو المستوى المحوري لـ  $[AB]$  إذن  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$  متعامد تام على لـ

(P) يتحمل I منتصف  $[AB]$

لدينا  $I \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

أي  $I \left( -\frac{1}{2}, 2, 1 \right)$

ومنه معادلة (P) هي من الشكل

$-7x + 6y - 2z + d = 0$

وبما أن  $I \in (P)$  إذن :

$-7 \left( -\frac{1}{2} \right) + 6(2) - 2(1) + d = 0$

$\frac{7}{2} + 10 + d = 0$

$d = -\frac{27}{2}$

(P):  $-7x + 6y - 2z - \frac{27}{2} = 0$  ومنه

$\vec{IM} \perp \vec{AB}$

$\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$  أي

معناه  $M(x, y, z) \in (P)$  أي

$\vec{IM} \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ y - 2 \\ z - 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

أي  $-7 \left( x + \frac{1}{2} \right) + 6(y - 2) - 2(z - 1) = 0$

$-7x + 6y - 2z - \frac{27}{2} = 0$



$$AM = BM$$

$$AM^2 = BM^2$$

معادلة  $M(x, y, z) \in (P)$  (ط 3)  
أي

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2$$

$$-6x + 2y - 4z + 14 = 8x - 10y + 4z$$

$$(P): -14x + 12y - 4z - 27 = 0$$

المعبر (33) Bac 2009 G.E. الموضوع 1 4 نقاط

$$A(1; 0; 2)$$

$$B(0; 2; 1)$$

$$C(2; 1; 3)$$

$$(P): x - 3z + 1 = 0$$

1) أ) تبين أن (P) هو ABC

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطيا لأن  $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{2}$

أي A, B, C تعين مستويًا وحيدًا (ABC)

$$A \in (P) \quad \text{أي} \quad 1 - 2 + 1 = 0$$

$$B \in (P) \quad \text{أي} \quad 0 - 1 + 1 = 0$$

$$C \in (P) \quad \text{أي} \quad 2 - 3 + 1 = 0$$

(1)

$$(P) = (ABC) \quad \text{وهذا}$$

ب) طبيعة الضلع ABC

$$AB^2 = (-1)^2 + (2)^2 + (-1)^2$$

$$AB^2 = 6$$

$$AC^2 = (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 = 3$$

$$BC^2 = (2-0)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2$$

$$BC^2 = 9$$

(2,5)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

وهذا

أي ABC مثلث قائم الزاوية في A



(2) نتحقق أن  $D \notin (ABC)$

لدينا  $x_D - 3y_D + 1 = 2 - 4 + 1 \neq 0$

إذن  $D \notin (ABC)$  (0,5)

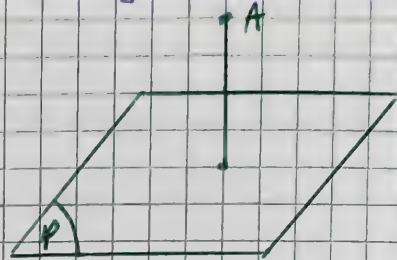
(ب) طبيعة (ABCD)

نما  $D \notin (ABCD)$  ، إذن ABCD رباعي وجوه .

المسافة بين النقطة  $A(x_A, y_A, z_A)$  والمستوى (P)

الذي معادلته  $ax + by + cz + d = 0$

$$d[A, (P)] = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



(3) حساب  $d[D, (ABC)]$

لدينا  $d[D, (ABC)] = \frac{|x_D - 3y_D + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (1)^2}}$

$$= \frac{|2 - 4 + 1|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

U.l : unité de longueur (وحدة طول)

U.a : unité d'aire (وحدة مساحة)

U.v : unité de volume (وحدة حجم)

(Volume) (ABCD) حجم (V)

حيث  $h$  الارتفاع  $S_B$  : Surface de base

$$V_{(ABCD)} = \frac{1}{3} S_B \times h$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \times d[D, (ABC)]$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \text{ U.a}$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ U.v}$$

$$V = \frac{1}{2} \text{ U.v}$$



الموضوع (8)

الدنيا

$$A(2; -1; 1)$$

$$B(-1; 2; 1)$$

$$C(1; -1; 2)$$

$$D(1; 1; 1)$$

(أ) التحقق من أن  $C, B, A$  تقع مستويًا

$A, B, C$  تقع مستويًا وحيدًا  $(ABC)$  معناه  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير مرتبطين خطيًا

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطيًا لأن  $\frac{-1}{-3} \neq \frac{0}{3}$

وهذه  $A, B, C$  تقع مستويًا. (0,75)

(ب) تبين أن  $\vec{n}(1; 1; 1)$  شعاع ناظمي لـ  $(ABC)$

لدينا  $\vec{AB} \cdot \vec{n} = (-3)(1) + (3)(1) + (0)(1) = 0$  أي  $\vec{AB} \perp \vec{n}$   
 $\vec{AC} \cdot \vec{n} = (-1)(1) + (0)(1) + (1)(1) = 0$  أي  $\vec{AC} \perp \vec{n}$

(1)

وهذه  $\vec{n}$  شعاع ناظمي لـ  $(ABC)$

(ج) كتابة معادلة ديكارتية لـ  $(ABC)$

بما أن  $\vec{n}(1, 1, 1)$  شعاع ناظمي لـ  $(ABC)$  (0,75)

إذن معادلة  $(ABC)$  من الشكل  $x + y + z + d = 0$

وحيث أن  $A \in (ABC)$   $2 + (-1) + 1 + d = 0$

$d = -2$  أي

وهذه

$(ABC): x + y + z - 2 = 0$

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

(د) مرجح الحملة  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

موجود ووحيد  $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$

بإحداثيات  $G$  هي:

$$\begin{cases} x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$



(2)  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, 1); (B, 2); (C, -1)\}$

(أ) احداثيات  $G$

بما أن  $1+2+(-1) \neq 0$  إذن  $G$  موجود ووحيد و  $\text{mod}$ :

ولدينا:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1 \times (2) + 2 \times (-1) + (-1) \times (1)}{1+2+(-1)} = -\frac{1}{2} \\ y_G = \frac{1 \times (-1) + 2 \times (2) + (-1) \times (-1)}{1+2+(-1)} = \frac{4}{2} = 2 \\ z_G = \frac{1 \times (1) + 2 \times (1) + (-1) \times (2)}{1+2+(-1)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

أي  $G(-\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2})$

ب)  $\Gamma = \{M; \|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|\}$

تبيان أن  $(\Gamma)$  المستوى المحوري لـ  $[GD]$

$\Gamma$  gamma

$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}$

حيث  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

$\|\vec{k}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

$\|\vec{AB}\| = AB = BA$

$k \in \mathbb{R}$

بما أن  $G$  مرجح الجملة  $\{(A, 1); (B, 2); (C, -1)\}$

إذن  $\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = (1+2-1)\vec{MG}$

$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$  معناه  $M \in (\Gamma)$

$\|2\vec{MG}\| = 2\|\vec{MD}\|$  أي

$|2| \times \|\vec{MG}\| = 2\|\vec{MD}\|$  أي

$MG = MD$

وهذا  $(\Gamma)$  هو المستوى المحوري لـ  $[GD]$

(ج) إثبات أن معادلة  $(\Gamma)$  هي  $6x - 4y + 2z + 3 = 0$

$M(x, y, z) \in (\Gamma)$  معناه  $MG = MD$  أي

$MG^2 = MD^2$

$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$



$$x - 4y - 3 + \frac{1}{4} + 4 + \frac{1}{4} = -2x - 2y - 2z + 3$$

$$3x - 2y + 3 + 1 + \frac{1}{2} = 0$$

$$(P) : 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \quad \text{وهو}$$

(3) تبين أن (ABC) و (P) يتقاطعان وفق مستقيمين (د)

لدينا  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع ناظم لـ (ABC)

(P)  $\vec{n} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  شعاع ناظم لـ

بما أن  $\frac{1}{6} \neq -\frac{1}{4}$  غير متجهين خطيًا أي (ABC) يقطع (P) وفق مستقيمين (د)

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 6x - 4y + 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad M(x, y, z) \in (A)$$

$$6x - 4y + 2z + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x + y = -t + 2 \\ 6x - 4y = -2t - 3 \\ z = t; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

نحل الحالة  $\begin{cases} x + y = -t + 2 \\ 6x - 4y = -2t - 3 \end{cases}$

$$6x - 4y = -2t - 3$$

لدينا  $\begin{cases} 4x + 4y = -4t + 8 \\ 6x - 4y = -2t - 3 \end{cases}$

$$6x - 4y = -2t - 3$$

وبالجمع طرفًا لطرف نجد

$$10x = -6t + 5$$

$$x = -\frac{6}{10}t + \frac{5}{10}$$

$$x = -\frac{3}{5}t + \frac{1}{2} \quad \text{أو}$$

وبالتعويض في  $x + y = -t + 2$  نجد

$$y = -t - \left(-\frac{3}{5}t + \frac{1}{2}\right) + 2$$

$$y = -t + \frac{3}{5}t - \frac{1}{2} + 2$$

$$y = -\frac{2}{5}t + \frac{3}{2}$$



ومن هنا نستنتج وسيطتي لـ  $(\Delta)$  هو

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{5}t + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{2}{5}t + \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(Bac 2013 S.E) (10N) المعتبر  
الموضوع 1

لدينا

$$(P): 2y + z + 1 = 0$$

$$A(-1; 1; 3)$$

$$B(1; 0; 1)$$

$$C(2; -1; 1)$$

$$D(2; 0; -1)$$

$$(\Delta): \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

1 كتابة معادلة وسيطتي لـ  $(BC)$

شعاع توجيه  $(BC)$  هو  $\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{BM} = t \vec{BC} \quad M(x, y, z) \in (BC)$$

أي معادلة وسيطتي لـ  $(BC)$  هو

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (0, 7, 5)$$

نتحقق أن  $(BC)$  محتوي في  $(P)$  أي  $(P) \subset (BC)$

$$\begin{cases} B \in (P) \text{ إذن } 2y_B + z_B + 1 = 2(0) + (-1) + 1 = 0 \\ C \in (P) \text{ إذن } 2y_C + z_C + 1 = 2(-1) + 1 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(P) \text{ إذن } 2y + z + 1 = 2(-t) + (2t - 1) + 1 = 0$$

2 تبين أن  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا من نفس المستوى

ليكن  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه  $(\Delta)$

$\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه  $(BC)$

$$\frac{0}{1} = \frac{1}{-1} \quad \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ غير مرتبطين خطيا لأن}$$

إذن  $(BC)$  لا توازي  $(\Delta)$

ولكن  $(BC)$  لا تقطع  $(\Delta)$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - (\sqrt{x})^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (1 - \sqrt{x}) \\ &= -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} \times u'$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ &= n x^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - 7x + 2)^5 \\ &= 5(x^3 - 7x + 2)^{5-1} \times (3x^2 - 7) \end{aligned}$$



التمرين (10A) (Bac 2013 S.E) (الموضوع 1)

$$(P): 2y + z + 1 = 0$$

لدينا  $A(-1; 1; 3)$

$B(1; 0; -1)$

$C(2; -1; 1)$

$D(2; 0; -1)$

$$(\Delta): \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases} (\beta \in \mathbb{R})$$

1. كتابة تمثيل وسيطي لـ  $(BC)$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

شعاع توجيه لـ  $(BC)$  هو

$$t \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{BM} = t \vec{BC} \quad M(x, y, z) \in (BC)$$

أي نكتب وسيط لـ  $(BC)$  هو

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

نتحقق أن  $(BC)$  محتوي في  $(P)$  أي  $(BC) \subset (P)$

ط 1:

بما أن

$$A \in (P) \text{ إذن } 2y_A + z_A + 1 = 2(1) + 3 + 1 = 2(0) + (-1) + 1 = 0$$

$$C \in (P) \text{ إذن } 2y_C + z_C + 1 = 2(-1) + 1 + 1 = 0$$

ط 2:

$$\text{بما أن } (BC) \text{ محتوي في } (P) \text{ إذن } 2y + z + 1 = 2(t) + (2t - 1) + 1 = 0$$



تبيان أن (د) و (BC) ليسا من نفس المستوى :

ليكن  $\vec{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  تتقاطع توجيه (د)

$\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  تتقاطع توجيه (BC)

لأن  $\vec{BC}$  غير مرتبطين خطيًا لأن  $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$

إذن (BC) لا يوازي (د)

وبنفس أن (BC) لا يقطع (د).

إحداثيات نقطة تقاطع (إن وجدت) (BC) و (د) هي

حلول الجملة

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \\ x = t + 1 \\ y = -t \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

نحل الجملة

$$\begin{cases} -1 = t + 1 & \textcircled{1} \\ 2 + \beta = -t & \textcircled{2} \\ 1 - 2\beta = 2t - 1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$t = -2$$

$$2 + \beta = 2$$

$$\beta = 0$$

من ① لدينا

و ② تصبح



هل ③ محققه من أجل  $t = -2$  و  $P$  لدينا  $1 - 2(0) = 2(2) - 1$  غير محققه

أي  $(BC)$  يقع  $(A)$  ومنه  $(A)$  و  $(BC)$  ليسا من نفس المستوى.

3) أ) حساب  $d[A, (P)]$  لدينا

$$d[A, (P)] = \frac{|2y_A + 3x_A + 1|}{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (1)^2}} = \frac{|2(1) + 3 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad (0, 2)$$

ب) تبين أن  $DE(P)$

$$2y_D + 3x_D + 1 = 2(0) + (-1) + 1 = 0 \quad (0, 2.5)$$

أي أن  $DE(P)$

تبين أن  $BCD$  مثلث قائم لدينا

$$BC^2 = (2-1)^2 + (-1-0)^2 + (1+1)^2 = 6$$

$$BD^2 = (2-1)^2 + (0-0)^2 + (-1+1)^2 = 1$$

$$CD^2 = (2-2)^2 + (0+1)^2 + (-1-1)^2 = 5$$

$$BD^2 + CD^2 = BC^2 \quad \text{أي أن}$$

$BCD$  قائم في  $D$

(0, 2.5)



٤) تبين أن ABCD رباعي وجوه

نجا أن  $d[A, (P)] \neq 0$  إذن  $A \notin (P)$

والنقط B, C, D تنتمي لـ (P) (5)

إذن ABCD رباعي وجوه

حساب حجم ABCD

$$V = \frac{1}{3} S_{(BCD)} \times h$$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ u.v}$$

$$V = 1 \text{ u.v}$$

$$S_{BCD} = \frac{BD \times DC}{2} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{2} \text{ u.v}$$

$$h = d[A, (P)] = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ u.l}$$

التمرين (102) BAC SE 2014 الموضع (2) 5 نقاط

$$A(1; -1; -2)$$

$$B(1; -2; -3)$$

$$C(2; 0; 0)$$

(1) أ) نبرهن أن A, B, C ليست في استقامة

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطيا

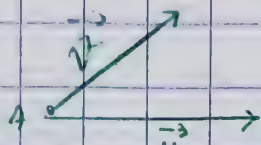
$$\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1} \text{ لأن}$$

و hence A, B, C ليست في استقامة

(0, 75)



(ب) كتابة تمثيل وسيطي لـ  $(ABC)$   
 $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مرتبطين خطياً



$$\vec{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \quad \text{مع } M(x, y, z) \in (P)$$

$\beta \in \mathbb{R}$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$

نبا أن  $A, B, C$  ليست في استقامة

إذن تكون مستوية وحيدة  $(ABC)$

مع  $\beta \in \mathbb{R}$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$  مع  $M(x, y, z) \in (ABC)$

ومن تمثيل وسيطي لـ  $(ABC)$  هو:

$$\begin{cases} x = \alpha(0) + \beta(1) + 1 \\ y = \alpha(-1) + \beta(1) + (-1) \\ z = \alpha(-1) + \beta(2) + (-2) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\alpha + \beta - 1 \\ z = -\alpha + 2\beta - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(ج) نتحقق أن  $x + y - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكارتية لـ  $(ABC)$

0,75

0,75



لدينا

$$x+y-z-2 = (\beta+1) + (-\alpha+\beta-1) - (-\alpha+2\beta-2) - 2$$

$$x+y-z-2=0 \quad \text{أي}$$

لدينا

1)  $A \in (ABC)$  أي  $x_A + y_A - z_A - 2 = 1 - 1 + 2 - 2 = 0$  لدينا

2)  $B \in (ABC)$  أي  $x_B + y_B - z_B - 2 = 1 - 2 + 3 - 2 = 0$

3)  $C \in (ABC)$  أي  $x_C + y_C - z_C - 2 = 2 + 0 - 0 - 2 = 0$

وبما أن  $A, B, C$  ليست في استقامة، إذن معادلة

$$x+y-z-2=0 \quad \text{هي } (ABC)$$

(P):  $x - y - 2z + 5 = 0 \quad (2)$

(Q):  $3x + 2y - z + 10 = 0$

نبرهن أن (P) يقطع (Q) وفق مستقيم (Δ)

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

لدينا

(P) شعاع ناظمي  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(Q) شعاع ناظمي  $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

بما أن  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  غير مرتبطين خطياً

$$\frac{1}{3} \neq -\frac{1}{2} \quad \text{لأن:}$$

إذن (P) يقطع (Q) وفق مستقيم (Δ)



و دما أي

$$(P) \text{ أي } (A) \text{ متحقق في } (P) \quad x - y - 2z + 5 = t - 3 - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0$$

$$(Q) \text{ أي } (A) \text{ متحقق في } (Q) \quad 3x + 2y - z + 10 = 3(t-3) + 2(-t) - (t+1) + 10 = 0$$

و منه نستنتج ونسجل (A) هو:

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2b

$$\begin{cases} x - y - 2z + 5 = 0 \\ 3x + 2y - z + 10 = 0 \end{cases}$$

أيضا  $M(x, y, z) \in (A)$

$$\begin{cases} x - 2z = k - 5 \\ y = k \\ 3x - z = -2k - 10 \end{cases} \quad ; k \in \mathbb{R} \quad \text{أي}$$

نحل الحالة

$$\begin{cases} x - 2z = k - 5 \\ -6x + 2z = 4k + 20 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x - 2z = k - 5 \\ 3x - z = -2k - 10 \end{cases}$$

و بعد الجمع نصل

$$-5x = 5k + 15$$

$$x = -k - 3$$



$$\begin{aligned} 3x - z &= -2k - 10 \\ 3(-k-3) - z &= -2k - 10 \\ -3k - 9 - z &= -2k - 10 \end{aligned}$$

$$-3k - 9 - z = -2k - 10$$

$$z = -k + 1$$

أي من الخيارات و سيطر (د) هو

$$\begin{cases} x = -k - 3 \\ y = k \\ z = -k + 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \text{أو } t = -k$$

(د) عن تقاطع المستويات (Q), (P), (ABC)

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

نما أن (P) تقاطع (Q) وفق المستقيم (د) حيث

نبحث عن تقاطع (ABC) و (د)

دما أن معادلة (ABC) هي

$$x + y - z - 2 = 0$$

إذن مع التوفيق نجد

(0, 7, 5)

$$t - 3 - t - (t + 1) - 2 = 0$$

$$t - 3 - t - t - 1 - 2 = 0$$

$$-t - 6 = 0$$

$$t = -6$$



أذن  $(\Delta)$  يقطع  $(ABC)$  في النقطة  $A(-9; 6; -5)$

$$\begin{cases} x = -6 - 3 = -9 \\ y = -(-6) = 6 \\ z = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

$$(P) \cap (Q) \cap (ABC) = \{A\} \quad \text{وهذا}$$

$A(-9; 6; -5)$  حيث

نقطة  $M(x; y; z)$  من الفضاء

$$\sqrt{6} d(M, (P)) = \sqrt{14} d(M, (Q)) \text{ حيث } M \in (\Gamma)$$

نعين  $(\Gamma)$

$$\sqrt{6} \times \frac{|x - y - 2z + 5|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{14} \times \frac{|3x + 2y - z + 10|}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1)^2}} \text{ حيث } M \in (\Gamma)$$

$$|x - y - 2z + 5| = |3x + 2y - z + 10| \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} x - y - 2z + 5 = 3x + 2y - z + 10 \\ x - y - 2z + 5 = -(3x + 2y - z + 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

$$x = -y$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 5 = 0 \\ 4x + y - 3z + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\Gamma) = (P_1) \cup (P_2) \quad \text{وهذا}$$

$$(P_1): 2x + 3y + z + 5 = 0$$

$$(P_2): 4x + y - 3z + 15 = 0$$



التمرين (103)

القضاء منسوب إلى معام متعامد ومتجانس (كأزمنة: 0)

نعتبر النقط

$A(1; -1; -2)$

$B(1; -2; -3)$

$C(2; 0; 0)$

1. نرهن أن  $A, B, C$  ليست في استقامة

2. عن معادلة ديكارتية لـ  $(ABC)$

3. إثبات أن  $A, B, C$  ليست في استقامة

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  غير متجهين خطيا

$$\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{-1}$$

ومنه  $A, B, C$  ليست في استقامة

2. نعين معادلة  $(ABC)$

بما أن  $A, B, C$  ليست في استقامة

! إذن نعين مستويًا وحيدًا  $(ABC)$

ليكن  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  حيث  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

شعاع ناطقي لـ  $(ABC)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} a(0) + b(-1) + c(-1) = 0 \\ a(1) + b(1) + c(2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(0) + b(-1) + c(-1) = 0 \\ a(1) + b(1) + c(2) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} b = -c \\ a - c + 2c = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -b - c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \quad \text{أي:}$$

$$\begin{cases} b = -c \\ a = -c \end{cases}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} \quad \text{ومن ثم}$$

من أجل  $c=1$  لدينا  $(-1, -1, 1)$   $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 ومن معادلات  $(ABC)$  في الشكل

$$-x - y + z + d = 0$$

$$\text{وبما أن } A \in (ABC) \text{ إذن } -1 - (-1) - 2 + d = 0 \Rightarrow d = 2$$

$$(ABC): -x - y + z + 2 = 0 \quad \text{ومن ثم}$$

التحريك (104)

النقطة منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

$$A(1; -1; -2) \quad \vec{OA} = (1, -1, -2)$$

$$B(1; -2; -3)$$

$$C(2; 0; 0)$$

(1) برهنا أن  $A, B, C$  ليست في استقامة

(2) عن تمثيله وسميته  $(ABC)$



1) اثبات أن  $A, B, C$  ليست في استقامة  
لدينا  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطياً

$$\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1} \quad \text{لأن}$$

ومن ثم  $A, B, C$  ليست في استقامة

2) نحس تمثيلاً ونسجياً لـ  $(ABC)$

$\alpha \in \mathbb{R} \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC} \quad \text{حيث } M(x, y, z) \in (ABC)$

ومن ثم تمثيل ونسجياً لـ  $(ABC)$  هو

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha(0) + \beta(1) \\ y = -1 + \alpha(-1) + \beta(1) \\ z = -2 + \alpha(-1) + \beta(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = -1 - \alpha + \beta \\ z = -2 - \alpha + 2\beta \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

التعريف (105)

(P) مستوى من الفضاء معادلاً  $2x - y + 3z - 7 = 0$

$$2x - y + 3z - 7 = 0$$

عني تمثيلاً ونسجياً لـ (P)



$$\begin{aligned} t \in \mathbb{R} & \rightarrow z = t & \text{توجيه} \\ k \in \mathbb{R} & y = k \\ 2x - k + 3t - 7 = 0 & \text{نجد} \\ 2x = k - 3t + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{R} & \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}t + \frac{7}{2} \\ y = k \\ z = t \end{cases} \\ t \in \mathbb{R} & \end{aligned}$$

$x = \frac{1}{2}k - \frac{3}{2}t + \frac{7}{2}$   
وهذا تمثيل وسيطي لـ (P)

التمرين 106

(P) مستوى من الفضاء تمثيل وسيطه له:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = 5 + 2\alpha + \beta \\ z = -3 - 3\alpha + 5\beta \end{cases} \text{ مع } \begin{aligned} \alpha & \in \mathbb{R} \\ \beta & \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(1) عين شعاعي توجيه (P)

(2) استنتاج معادلة بيكارتيه لـ (P)

(3) شعاعا توجيه (P) هما  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  و  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(4) معادلة بيكارتيه لـ (P)

من الحالة السابقة نحصل علاقة بين  $x, y, z$

$$\begin{aligned} \text{نحسب } \alpha \text{ و } \beta \text{ من الحالة} & \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ y = 5 + 2\alpha + \beta \end{cases} \\ \text{أي:} & \begin{cases} x = 1 + \alpha - 2\beta \\ 2y = 10 + 4\alpha + 2\beta \end{cases} \end{aligned}$$



ونعبر الجميع طرفاً لطرف نجد

$$x + 2y = 11 + 5x$$

$$\frac{x + 2y - 11}{5} = x$$

أي

ونعبر المعادلة في

$$y = 5 + 2x + \beta \quad \text{نجد}$$

$$y = 5 + 2 \left( \frac{x + 2y - 11}{5} \right) + \beta$$

$$y = 5 + \frac{2x + 4y - 22}{5} + \beta$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{25 + 2x + 4y - 22}{5} + \beta$$

$$\beta = \frac{5y - 25 - 2x - 4y + 22}{5}$$

$$\beta = \frac{-2x + y - 3}{5}$$

ونعبر المعادلة في

$$z = -3 - 3x + 5\beta$$

$$z = -3 - 3 \left( \frac{x + 2y - 11}{5} \right) + 5 \left( \frac{-2x + y - 3}{5} \right)$$

$$5z = -15 - 3x - 6y + 33 - 10x + 5y - 15$$

و نلاحظ ان المعادلة هي

$$-13x - y - 5z + 3 = 0$$



التحريين (107) اذ ورن جوان 2012 التحريين (2) الموضوع (2) 4 نقاط

S.E

$$A(-1; 0; 1)$$

$$B(2; 1; 0)$$

$$C(1; -1; 0)$$

(1) تبين أن  $A, B, C$  تقعن مستويًا

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطيًا لأن  $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1}$

(0,75)

اذن  $A, B, C$  ليست في استقامة أي تقعن مستويًا وحيث

(ABC)

(2) تبين أن  $2x - y + 5z - 3 = 0$  هي معادلة ديكارتية

للمستوي (ABC)

ط (1) لدينا  $AE(ABC) \quad 2x_A - y_A + 5z_A - 3 = 2(-1) - 0 + 5(1) - 3 = 0$

$BE(ABC) \quad 2x_B - y_B + 5z_B - 3 = 2(2) - 1 + 5(0) - 3 = 0$  (1)

$CE(ABC) \quad 2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 2(1) - (-1) + 5(0) - 3 = 0$

ومنه معادلة (ABC) هي  $2x - y + 5z - 3 = 0$

ط (2)

ليكن  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  شعاع ناطقي لـ (ABC) حيث  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

اذن

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + b - c = 0 \\ 2a - b - c = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$



$$\begin{cases} 3a + b - 1 = 0 \\ 2a - b - 1 = 0 \end{cases}$$

من أجل  $(C=1)$  لدينا

$$5a = 2$$

$$a = \frac{2}{5}$$

وبالجمع طرفاً الطرف نجه

$$3a + b - 1 = 0$$

$$b = -\frac{1}{5}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أي

وهذه معادلة  $(ABC)$  هي من الشكل  $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + z + d = 0$  بما أن  $A \in (ABC)$  إذن

$$d = -\frac{3}{5} \text{ أي } \frac{2}{5}(-1) - \frac{1}{5}(0) + 1 + d = 0$$

أي معادلة  $(ABC)$  هي

$$\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y + z - \frac{3}{5} = 0$$

$$2x - y + 5z - 3 = 0 \text{ أي}$$

$$H\left(\frac{13}{15}, -\frac{13}{30}\right)$$

$$D(2, 1, 3) \text{ و}$$

(أ) نتحقق أن  $D \notin (ABC)$

$$2x_D - y_D + 5z_D - 3 = 2(2) - (-1) + 5(3) - 3 = 17 \neq 0 \text{ 0, 25}$$

إذن  $D \notin (ABC)$  ن. تبين أن  $H$  المسقط العمودي لـ  $D$  على  $(ABC)$ .

$H$  المسقط العمودي لـ  $D$  على  $(ABC)$

يعني  $\vec{HD}$  و  $\vec{n}$  مرتبطان خطياً حيث  $\vec{n}$  شعاع ناظم لـ  $(ABC)$ .

$$H \in (ABC)$$



$$\begin{aligned}
 2x_H - y_H + 5z_H - 3 &= 2\left(\frac{13}{15}\right) - \left(-\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) - 3 \\
 &= \frac{26}{15} + \frac{13}{30} + \frac{5}{6} - 3 \\
 &= \frac{52 + 13 + 25 - 90}{30} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

إذن  $HE(ABC)$  وليست

مرتبطان خطياً  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  و  $\vec{HD} \begin{pmatrix} \frac{17}{15} \\ -\frac{17}{30} \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix}$

$$\frac{\frac{17}{15}}{2} = \frac{-\frac{17}{30}}{-1} = \frac{\frac{17}{6}}{5}$$

لا

ومن هنا  $H$  المسقط العمودي لـ  $D$  على  $(ABC)$

(د) استنتاج أن  $(ADH) \perp (ABC)$

نبا أن  $H$  المسقط العمودي لـ  $D$  على  $(ABC)$  و  $AE(ABC)$  و  $HE(ABC)$  إذن  $(ADH) \perp (ABC)$

لدينا  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  و  $\vec{HA} \begin{pmatrix} -\frac{28}{15} \\ \frac{13}{30} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$  شعاع خارجي لـ  $(ADH)$

$$\vec{HA} \cdot \vec{n} = 2\left(-\frac{28}{15}\right) + (-1)\left(\frac{13}{30}\right) + 5\left(\frac{5}{6}\right) = 0$$

إذن  $(ADH) \perp (ABC)$



نقطتين وسطح التقاطع  
نصا أن

$$(AH) \subset (ABC) \quad \begin{cases} A \in (ABC) \\ H \in (ABC) \end{cases}$$

و

$$(AH) \subset (ADH) \quad \begin{cases} A \in (ADH) \\ H \in (ADH) \end{cases}$$

إذن  $(ADH)$  يقطع  $(ABC)$  في  $(AH)$

أي تقبل وسيط  $(AH)$  هو:

$$\begin{cases} x = \frac{29}{15}t - 1 \\ y = -\frac{13}{30}t \\ z = \frac{5}{6}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

التمرين (108)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; i, j, k)$

نعتبر النقط

$$A(3; -2; 4)$$

$$B(1; -1; 2)$$

$$C(4; 6; -3)$$

① عين مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي

$$\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 3 \quad \text{تحقق}$$

② عين مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء بحيث

$$AM = CM \quad \text{ثم عين معادله}$$



(1) نكتب مجموعة النقط  
 $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 3$   
 $\vec{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix}$  لدينا

اذن  $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = 3$  نكتب

$$3(x-3) + 7(y+2) - 5(z-4) = 3$$

$$3x - 9 + 7y + 14 - 5z + 20 - 3 = 0$$

$$3x + 7y - 5z - 9 + 14 + 20 - 3 = 0$$

$$3x + 7y - 5z + 22 = 0$$

وهذه مجموعة النقط M هي المستوى الذي يمر بالنقطتين

$$3x + 7y - 5z + 22 = 0$$

(2) نكتب مجموعة النقط M بحيث  $AM = CM$

بما ان  $AM = CM$  اذن مجموعة النقط M هي المستوى

المحوري للقطعة [AC]

$$AM^2 = CM^2 \iff AM = CM$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 + z^2 + 6z + 9$$

$$-6x + 9 + 4y + 4 - 8z + 16 = -8x + 16 - 12y + 36 + 6z + 9$$

وهذه معادلة المستوى المحوري لـ [AC] هي

$$x + 8y - 7z - 16 = 0$$

المستوي المحوري لـ (P) [AC] هو المستوى المحوري على [AC]

في منتصفها I



اذن  $\vec{AC} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$  شعاع  $\Delta$  (P) ولدينا

ومنه معادلة (P) من الشكل  $I \left( \frac{7}{2}; 2; \frac{1}{2} \right)$   
 $x + 8y - 7z + d = 0$   
 ولدينا  $I \in (P)$  اذن

$$\frac{7}{2} + 8(2) - 7\left(\frac{1}{2}\right) + d = 0$$

$$d = -16$$

$$(P): x + 8y - 7z - 16 = 0 \quad \text{أي}$$

معادلة سطح كرة (S) مركزها  $(x_0; y_0; z_0)$   
 ونصف قطرها R (حيث  $R > 0$ )  
 من الشكل

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \quad \text{أي}$$

المقرين ١٥٩

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$A(1; 3; 2)$$

نعتبر النقط

$$B(-4; -1; 2)$$

$$C(3; 0; 5)$$

ما عين معادلة سطح الكرة  $(S_1)$  التي مركزها B ونصف قطرها 5



(1) عين معادلة سطح الكرة  $(S_2)$  التي مركزها A وتشمل النقطة C

(2) عين معادلة سطح الكرة  $(S_3)$  التي قطرها [BC]

(3) بما أن B هو مركز  $(S_1)$  ونصف قطرها 5، إذن معادلة  $(S_1)$  هي

$$(x - (-4))^2 + (y - (-1))^2 + (z - 2)^2 = 5^2$$

$$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 25$$

$$(أو: x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2y - 4z - 4 = 0)$$

(4) بما أن المركز هو A و  $(S_2)$  يشمل النقطة C

إذن نصف القطر هو AC

$$AC^2 = (3 - 1)^2 + (0 - 3)^2 + (5 - 2)^2$$

$$AC^2 = 22$$

ومنه معادلة  $(S_2)$  هي

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 22$$

(5) تعين معادلة سطح الكرة  $(S_3)$  التي قطرها [BC] حيث

$$B(-4, -1, 2)$$

$$C(3, 0, 5)$$

نصف



خط مماس آن  $[AC]$  هو قطر  $(S_3)$   
 إذن مركزها  $n$  هو منتصف  $[AC]$   
 ونصف قطرها  $r = \frac{BC}{2}$   
 إحداثيات  $n$

$$n\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right) \text{ حيث } \begin{cases} x_n = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4 + 3}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_n = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1 + 0}{2} = -\frac{1}{2} \\ z_n = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 + 5}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

نحسب  $R$   
 لدينا

$$R^2 = nB^2$$

$$R^2 = \left(-4 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$R^2 = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

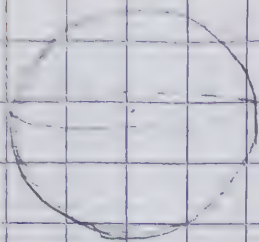
$$R^2 = \frac{59}{4}$$

و معادلة  $(S_3)$  هي

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{59}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y - 7z - 2 = 0 \quad S_1$$





2b

$$\vec{BM} \perp \vec{CM} \text{ معناه } M(x, y, z) \in (S_3)$$

$$\vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0 \text{ أي } (x+4)(x-3) + (y+1)(y-0) + (z-2)(z-5) = 0$$

$$(x+4)(x-3) + (y+1)y + (z-2)(z-5) = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y - 7z - 2 = 0 \text{ ومنه}$$

$$\vec{CM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-0 \\ z-5 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{BM} \begin{pmatrix} x+4 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} \text{ لأن}$$

التقريب (110)

(P) مستوى من الفضاء معرف بتقاطع المستويين

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 1 + \alpha \\ z = 5 + \alpha + \beta \end{cases} \text{ حيث } \begin{matrix} \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

مع معادلة ديكارتية لـ (P)

نحذف  $\alpha$  بين  $x, y, z$  مستقلة عن  $\alpha$  و  $\beta$

$$x - y - z = 1 + 2\alpha + \beta - (1 + \alpha) - (5 + \alpha + \beta)$$

$$x - y - z = -5$$

$$(P): x - y - z + 5 = 0 \text{ ومنه}$$

2b

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta & (1) \\ y = 1 + \alpha & (2) \\ z = 5 + \alpha + \beta & (3) \end{cases}$$



$$x = y - 1$$

حسب (2) لدينا

$$z = 5 + y - 1 + \beta$$

ومنه (3) نكتب

$$z - y - 4 = \beta$$

وبالتالي (1) نحسب

$$x = 1 + 2(y - 1) + z - y - 4$$

$$x = 1 + 2y - 2 + z - y - 4$$

$$(P) : x - y - z + 5 = 0$$

ومنه

نحل المعادلة

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = 5 + \alpha + \beta \end{cases}$$

$$x - z = 1 + 2\alpha + \beta - 5 - \alpha - \beta$$

وبالطرح نجد

$$x - z = \alpha - 4$$

$$x - z + 4 = \alpha$$

$$y = 1 + \alpha \quad \text{وبالتعويض في (3) نجد}$$

$$y = 1 + x - z + 4$$

أي

$$x - y - z + 5 = 0$$

التقريب 111

عين معادلة ديكارتيّة لسطح الكرة (S) التي مركزها  $(1; -3; 1)$  وتتمس المستوي (P) الذي معادلاته

$$x + 2y - 2z + 5 = 0$$



$d[n, (P)]$  مسافة (P) من (S) مسافة  
لدينا

$$R = d[n, (P)]$$

$$= \frac{|x_1 + 2y_1 - 2z_1 + 5|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 2(-3) - 2(1) + 5|}{\sqrt{9}}$$

$$= \frac{|-1|}{3}$$

$$R = \frac{1}{3}$$

ومنه

ومنه معادلة (S) هي

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + \frac{125}{9}) = 0 \quad (1)$$

التقريب 112

تعرف عن مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  من الفضاء التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 12x + 16y + 3 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0 \quad (4)$$



$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 + 2ab = (a+b)^2 - (b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$a^2 - 2ab = (a-b)^2 - (b)^2$$

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

نكتب  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 18 = 0$  (1)

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + (z^2 + 2z) + 18 = 0$$

$$(x+2)^2 - (2)^2 + (y-3)^2 - (3)^2 + (z+1)^2 - (1)^2 + 18 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 - 4 - 9 - 1 + 18 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = -4$$

وبما أن  $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 \geq 0$  و  $-4 < 0$

إذن مجموعة النقاط الخالية مجموعة فارغة

(2)

نكتب  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 2 = 0$

$$(x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 4z) - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (1)^2 + y^2 + (z+2)^2 - (2)^2 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 7$$

مجموعة النقاط هي كرة (S) مركزها (1; 0; -2) ونصف قطرها

$$R = \sqrt{7}$$



$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 12x + 16y + 8 = 0 \quad (3)$$

بعد قسمة الطرفين على 4

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y + \frac{3}{4} = 0$$

أي

$$(x^2 - 3x) + (y^2 + 4y) + z^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 - (2)^2 + z^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 + z^2 - \frac{9}{4} - 4 + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 + z^2 = \frac{22}{4}$$

ومنه مجموعة النقط M من سطح كرة (5) مركزها  $(\frac{3}{2}, -2, 0)$  ونصف قطرها  $\frac{\sqrt{22}}{2}$

$$R = \frac{\sqrt{22}}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$$

نكتب

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) + 14 = 0$$

$$(x - 1)^2 - (1)^2 + (y + 2)^2 - (2)^2 + (z - 3)^2 - (3)^2 + 14 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 1 - 4 - 9 + 14 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 0$$

ومنه مجموعة النقط M هي  $\{(1, -2, 3)\}$



التمرين (113)

عن مجموعة النقاط  $M(x, y, z)$  من الفضاء التي تحقق

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 12$$

$$A(1; 2; 3) \quad \text{حيث}$$

$$B(0; -1; 5)$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 12 \quad \text{حيث } M(x, y, z) \in (\Gamma)$$

$$\text{أي } x(x-1) + (y+1)(y-2) + (z-5)(z+3) = 12$$

$$\vec{BM} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-5 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - x + y^2 - 2y + y + 2 + z^2 + 3z - 5z - 15 - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 2z - 29 = 0$$

$$(x^2 - x) + (y^2 - y) + (z^2 - 2z) - 29 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 - (1)^2 - 29 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 - 29 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{122}{4}$$

وهذا  $(\Gamma)$  سطح كرة مركزها  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$  ونصف قطرها

$$R = \sqrt{\frac{122}{4}} = \frac{\sqrt{122}}{2}$$



التحريك (114) 2012 G. E. Bac المونتوج (1) التمرين (3) 4 نقاط

لدينا:  $(P): 14x + 16y + 13z - 47 = 0$

$A(1; -2; 5)$

$B(2; 2; -1)$

$C(-1; 3; 1)$

(1) اتحقق أن  $A, B, C$  ليست في استقامة

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطياً

لأن  $-\frac{2}{1} \neq \frac{5}{4}$

إذن  $A, B, C$  ليست في استقامة

بما يتبين أن  $(ABC)$  هو  $(P)$

بما أن  $A, B, C$  ليست في استقامة، إذن نعين مستويًا واحدًا  $(ABC)$

ولدينا  $A \in (P) \Rightarrow 14x_A + 16y_A + 13z_A - 47 = 14(1) + 16(-2) + 13(5) - 47 = 0$

$B \in (P) \Rightarrow 14x_B + 16y_B + 13z_B - 47 = 14(2) + 16(2) + 13(-1) - 47 = 0$

$C \in (P) \Rightarrow 14x_C + 16y_C + 13z_C - 47 = 14(-1) + 16(3) + 13(1) - 47 = 0$

إذن  $(P) = (ABC)$

② إيجاد تمثيل وسيطي  $(AB)$

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه  $(AB)$

$k \in \mathbb{R}$  مع  $\vec{AM} = k\vec{AB}$   $M(x, y, z) \in (AB)$

$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + 4k \\ z = 5 - 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$  أي تمثيل وسيطي لـ  $(AB)$  هو:



(3) كتابة معادلة (Q) المستوي المتعري لـ [AB]

1b

AM = BM معناه  $M(x, y, z) \in (Q)$

$$AM^2 = BM^2$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 10z + 25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1$$

$$(Q): 2x + 8y - 12z + 21 = 0 \quad \text{ومنه:}$$

2b

نماذج (Q) هو المستوي المتعري لـ [AB]

إذن  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  شعاع ناظم لـ

أي معادلة (Q) من الشكل:

$$x + 4y - 6z + d = 0$$

وبما أن (Q) يسجل  $I\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$  متعلق [AB] إذن

إذن

$$\frac{3}{2} + 4(0) - 6(2) + d = 0$$

$$d = \frac{21}{2}$$

$$\frac{3}{2} - 12 + d = 0$$

ومنه:

$$(Q): x + 4y - 6z + \frac{21}{2} = 0$$

$$(2x + 8y - 12z + 21 = 0 \quad \text{أو})$$

ومنه

$$(Q): 2x + 8y - 12z + 21 = 0$$



ط 3) معادلات (Q) هو المستوى المماس لـ  $[AB]$   
 إذن:  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$  شغل قاطبي لـ  $\pi$

ولدينا (Q) يتشكل  $I(\frac{3}{2}; 0; 2)$  منتصف  $[AB]$   
 $\vec{IM} \perp \vec{AB}$  مع  $M(x, y, z) \in (Q)$   
 أي:  $\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0$

أب  
 $\vec{IM} \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y \\ z - 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$  لأن  $1(x - \frac{3}{2}) + 4y + (-6)(z - 2) = 0$   
 $x - \frac{3}{2} + 4y - 6z + 12 = 0$   
 $2x - 3 + 8y - 12z + 24 = 0$

ومنه (Q):  $2x + 8y - 12z + 21 = 0$

ب) نتحقق أن  $D(-1; -2; \frac{1}{4})$  تنتمي لـ (Q)  
 لدينا:

$2x_D + 8y_D - 12z_D + 21 = 2(-1) + 8(-2) - 12(\frac{1}{4}) + 21 = 0$   
 إذن  $D \in (Q)$

ج) حساب  $d[D; (AB)]$

ما أن (Q) هو المستوى المماس لـ  $[AB]$

و  $D \in (Q)$  إذن المسافة العمودية لـ D على  $[AB]$

هو I منتصف  $[AB]$   
 إذن

$d[D; (AB)] = ID$   
 $= \sqrt{(-1 - \frac{3}{2})^2 + (-2 - 0)^2 + (\frac{1}{4} - 2)^2}$



$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 4 + \frac{49}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{100 + 64 + 49}{16}}$$

$$d[D, (AB)] = \frac{\sqrt{213}}{4}$$

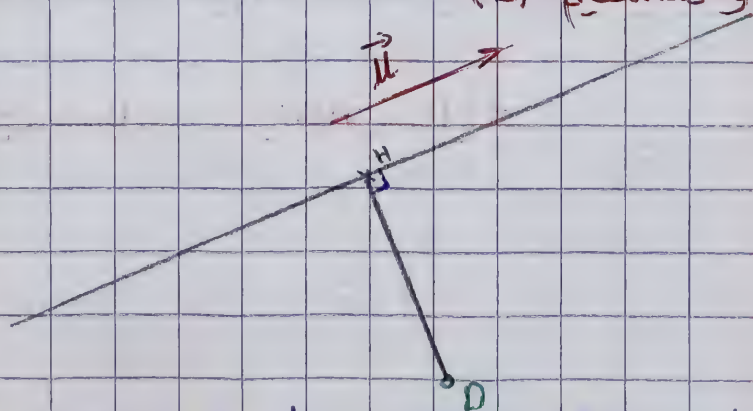
التحريين (115)

( $\Delta$ ) مستقيم من الفضاء

تمثيل وسيط له هو:

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 + 4k \\ z = 5 - 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

عني المسافة (أو البعد) بين النقطة  $D(-1, -2, \frac{1}{4})$  والمستقيم ( $\Delta$ )



نسمي H المسقط العمودي لـ D على ( $\Delta$ ).

المسافة (أو البعد) بين النقطة D والمستقيم ( $\Delta$ ) هي

$$DH = d[D, (\Delta)]$$



نقطه اعداد ثبات  $H$

$$\left. \begin{array}{l} HE(\Delta) \\ \vec{DH} \perp \vec{u} \end{array} \right\} \text{ لدينا } \vec{u} \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ -6 \end{array} \right) \text{ شعاع قوسه } (\Delta)$$

$$H(1+k; -2+4k; 5-6k) \text{ من } HE(\Delta)$$

$$\vec{DH} \cdot \vec{u} = 0 \text{ لأن } \vec{DH} \perp \vec{u}$$

$$\vec{u} \left( \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ -6 \end{array} \right)$$

أو

$$1(k+2) + 4(4k) + (-6)\left(\frac{19}{4} - 6k\right) = 0$$

$$k + 2 + 16k - \frac{57}{2} + 36k = 0$$

$$53k - \frac{53}{2} = 0$$

$$\vec{DH} \left( \begin{array}{c} 1+k-(-1) \\ -2+4k-(-2) \\ 5-6k-\frac{1}{4} \end{array} \right)$$

أي

$$k = \frac{1}{2}$$

أي

$$\vec{DH} \left( \begin{array}{c} k+2 \\ 4k \\ \frac{19}{4} - 6k \end{array} \right)$$

ومنه اعداد ثبات  $H$  هي:

$$H\left(\frac{3}{2}; 0; 2\right)$$

$$\text{أي } \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = -2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ z = 5 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

وبالتالي

$$DH = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (2)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2}$$

$$DH = \frac{\sqrt{213}}{4}$$

أي



(Δ) جو اگلی  $M(x, y, z)$  کی (2D)

$$DM = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2 + \left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$DM = \sqrt{(1+k+1)^2 + (-2+4k+2)^2 + \left(5-6k - \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$DM = \sqrt{(k+2)^2 + (2k)^2 + \left(\frac{19}{4} - 6k\right)^2}$$

$$DM = \sqrt{53k^2 - 53k + \frac{425}{16}}$$

[DM] کا job,  $DM$  کی ہادی

$$DM^2 = 53k^2 - 53k + \frac{425}{16}$$

$$DM^2 = f(k)$$

یعنی  
جو

$$f(k) = 53k^2 - 53k + \frac{425}{16}$$

$$f'(k) = 106k - 53$$

$f'(k)$	-	0	+
---------	---	---	---

$$f(k)$$

$$\searrow f\left(\frac{1}{2}\right) \nearrow$$

اگر

$$DM^2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$DM = \frac{\sqrt{213}}{4}$$

یعنی  $DM = g(k)$  جو

$$g(k) = \sqrt{53k^2 - 53k + \frac{425}{16}}$$

$$g'(k) = \frac{106k - 53}{2\sqrt{53k^2 - 53k + \frac{425}{16}}}$$

$k$	$\frac{1}{2}$
-----	---------------

$g'(k)$	-	0	+
---------	---	---	---

$$g(k)$$

$$\searrow g\left(\frac{1}{2}\right) \nearrow$$



المعبر (116)

$$A(2; 1; 3)$$

$$B(-3; -1; 7)$$

$$C(3; 2; 4)$$

أ) تبين أن  $A, B, C$  تقعين مستويًا

لدينا  $\vec{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  و  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  غير مرتبطين خطيًا لأن  $\frac{-5}{1} \neq \frac{-2}{1}$

أي  $A, B, C$  ليست في استقامة

أي تقعين مستويًا وحيدًا  $(ABC)$

ب) لدينا 
$$(d) \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

أ) تبين أن  $(d) \perp (ABC)$

$(d) \perp (ABC)$  معناه  $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC} \end{cases}$  حيث  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه

$$\vec{u} \cdot \vec{AB} = 2(-5) + (-2)(-3) + (4)(1) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{AC} = (2)(1) + (-3)(1) + (1)(1) = 0$$

إذن  $(d) \perp (ABC)$

ب) معادلة  $(ABC)$

بما أن  $(d) \perp (ABC)$  إذن  $\vec{u}$  شعاع توجيه  $(d)$  هو أيضًا شعاع ناطق  $(ABC)$

أي معادلة  $(ABC)$  هي الشكل  $2x - 3y + z + d = 0$



بما أن  $A \in (ABC)$  إذن

$$2(2) - 3(1) + 3 + d = 0$$

$$d = -4 \quad \text{أي}$$

ومنه

$$(ABC): 2x - 3y + 3 - 4 = 0$$

3- نقطة تقاطع  $(d)$  و  $(ABC)$

(أ) تبين أن  $H$  مركز المحلة  $\{(A, -2), (B, -1), (C, 2)\}$  بمساوق:

$$-2 + (-1) + 2 = -1 \neq 0 \quad \text{إذن المربع } H \text{ الموهود ولا مساوق}$$

$$\begin{cases} x_H = \frac{-2(2) + (-1)(-3) + 2(3)}{-2 + (-1) + 2} = \frac{5}{-1} = -5 \\ y_H = \frac{-2(1) + (-1)(-1) + 2(2)}{-2 + (-1) + 2} = \frac{3}{-1} = -3 \\ z_H = \frac{-2(3) + (-1)(7) + 2(4)}{-2 + (-1) + 2} = \frac{-5}{-1} = 5 \end{cases}$$

$$H(-5, -3, 5) \quad \text{أي}$$

يبين أن  $H \in (P)$  و  $H \in (d)$

$$2(-5) - 3(-3) + (5) - 4 = 0 \quad \text{لأن } H \in (P)$$

$$\text{لأن } H \in (d)$$

$$\begin{cases} -5 = -7 + 2t \\ -3 = -3t \\ 5 = 4 + t \end{cases} \quad \text{نقل } t \text{ وحيداً 1}$$

$$(t = 1)$$

وهو المطلوب



(25) عين  $H$  كفاية (d) و (ABC)  
إحداثيات  $H$  هي حلول المعادلة

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

و نعوض في (\*) نعلم

$$2(-7 + 2t) - 3(-3t) + (4 + t) - 4 = 0$$

$$-14 + 4t + 9t + 4 + t - 4 = 0$$

$$14t = 14$$

$$H(-5, -3, 5) \text{ ومدة } (t=1)$$

وساكن:

$$-2 + (-1) + 2 = 0$$

إذن مركز المعادلة  $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$  هو مركز الدائرة  
ولكن  $G$

$$\begin{cases} x_G = \frac{-2(1) + (-1)(-3) + 2(3)}{-2(1) + (-1) + 2} = -5 \\ y_G = \frac{-2(1) + (-1)(-1) + 2(2)}{-2 + (-1) + 2} = -3 \\ z_G = \frac{-2(3) + (-1)(7) + 2(4)}{-2 + (-1) + 2} = 5 \end{cases}$$

$$(G=H) \text{ ومدة } G(-5, -3, 5) \text{ أي}$$



$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{إذا كان}$$

فان

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$$

الشعاع

ثابت (أو مستقل عن النقطة M)

$$-2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = -\vec{MA} - \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \quad \text{مثال}$$

$$= \vec{AM} + \vec{AM} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

$$= \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$G_1 = \left\{ M; (-2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) \right\} \quad \text{نقطة (G) حيث}$$

مساوي

$$1) -2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = (-2 - 1 + 2)\vec{MH} = -\vec{MH}$$

$$2) \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{CM} = \vec{CB}$$

شعاع ثابت

$$(-2\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) \cdot (\vec{MB} - \vec{MC}) = 0 \quad \text{إذا كان}$$

$$-\vec{MH} \cdot \vec{CB}$$

تصبح

$$\vec{MH} \cdot \vec{CB} = 0$$

$$\vec{MH} \perp \vec{CB}$$

أي أي

$\vec{CB}$  شعاع خارجي لـ

ومنه  $(G_1)$  مسوي حيث

ويشمل النقطة H



نعيّن معادلة  $(S_1)$

لدينا  $\vec{CB} \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

إذن معادلة  $(S_1)$  من الشكل  $-6x - 3y + 3z + d = 0$

وبما أن  $H \in (S_1)$  إذن  $-6(-5) - 3(-3) + 3(5) + d = 0$

$$d = -54$$

ومنه

$$(S_1) \quad -6x - 3y + 3z - 54 = 0$$

$$2x + y - z + 18 = 0$$

5 نعيّن  $(S_2)$  حيث

$$S_2 = \left\{ M; \quad \| 2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29} \right\}$$

$$\text{نكتب} \quad \| 2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$$

$$\| \vec{MH} \| = \sqrt{29}$$

$$MH = \sqrt{29}$$

ومنه  $(S_2)$  سطح كرة مركزها  $H$  ونصف قطرها  $R = \sqrt{29}$

معادلة  $(S_2)$

$$(x+5)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = (\sqrt{29})^2$$

6 نعيّن  $(S_1) \cap (S_2)$

منه بما أن  $H \in (S_1)$  و  $H$  مركز السطح  $(S_2)$

إذن  $(S_1)$  يقطع  $(S_2)$  وفق دائرة مركزها  $H$  (أكبر دائرة)

ونصف قطرها  $R = \sqrt{29}$



$$HS = \sqrt{29} \quad S \in (S_1) \cap (S_2)$$

$$HS^2 = (8+5)^2 + (1+3)^2 + (3-5)^2$$

$$HS^2 = 29$$

$$HS = \sqrt{29} \quad \text{أي}$$

$$S \in (S_1) \cap (S_2) \quad \text{وهذه}$$

التمرين (117)

(A) مستقيم في الفضاء تمثله الوسيط هو

$$\begin{cases} x = t \\ y = t+1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(S) مجموعة النقط  $M(x, y, z)$  في الفضاء بحيث

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$$

1- تبين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزه

ن- ونصف قطره R

2- ادرس تقاطع (A) و (S)

3- تبين أن (S) سطح كرة

المعادلة تكسب

$$(x^2 - 2x) + y^2 + (z^2 + 2z) - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 - (1)^2 + y^2 + (z+1)^2 - (1) - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$$

أي (S) سطح كرة مركزه  $(1, 0, -1)$  و



و نصف قطره  $R = \sqrt{4} = 2$

$$t^2 + (t+1)^2 + (t)^2 - 2t + 2(t) - 2 = 0$$

$$t^2 + t^2 + 2t + 1 + t^2 - 2t + 2t - 2 = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = -\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

$$(\Delta) \cap (S) = \{A, B\} \quad \text{ومنه حيث}$$

$$A(-1; 0; -1)$$

$$B\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

الأعداد المركبة

les nombres complexes

كل عدد مركب من الشكل

$$z = x + iy$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}$$

$$i^2 = -1$$

الشكل الجبري

أو

الشكل العادي

أو

الشكل الديكارتي

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

الجزء الحقيقي

$$\operatorname{Im}(z) = y$$

الجزء التخيلي



$$x = x' \quad \text{معنا} \quad x + iy = x' + iy'$$

$$y = y'$$

$$x = 0 \quad \text{معنا} \quad x + iy = 0$$

$$y = 0$$

إذا كان  $x = 0$  فإن:

$$y \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad z = iy$$

تخيلي صرف

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{مع} \quad z = x$$

حقيقي

التمرين (118)

احسب مايلي

$$(2-5i)(3+i)(7-2i) \quad \text{..... (1)}$$

$$(1+2i)^3 \quad \text{..... (2)}$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{22} \quad \text{..... (3)}$$

1) لدينا:

$$\begin{aligned} (2-5i)(3+i)(7-2i) &= (6+2i-15i-5i^2)(7-2i) \\ &= (6-13i+5)(7-2i) \\ &= (11-13i)(7-2i) \\ &= 77-22i-91i+26i^2 \end{aligned}$$



$$= 77 - 113i - 26$$

$$= 51 - 113i$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

بنا 2

$$(1+2i)^3 = (1)^3 + 3(1)^2(2i) + 3(1)(2i)^2 + (2i)^3$$

$$= 1 + 6i - 12 - 8i$$

$$= -11 - 2i$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{32} = \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\right]^{16}$$

$$= \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}\right]^{16}$$

$$= \left[\frac{2i}{-2i}\right]^{16}$$

$$= (-1)^{16}$$

$$= 1$$

التمرين 119

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 + 2i = 0$

$$z^2 + 2i = 0 \quad \text{كتب}$$

$$z^2 = -2i$$

$$z^2 = (1-i)^2$$

أي

$$(1-i)^2 = -2i \quad \text{لا}$$

$$z = 1-i$$

$$z = -(1-i) = -1+i$$



$$S = \{1-i; -1+i\}$$

المسألة (120)

عبر العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث

$$40 + 42i = (7 + \alpha i)^2$$

$$40 + 42i = 49 + 14\alpha i + (\alpha i)^2 \quad \text{أي } 40 + 42i = (7 + \alpha i)^2$$

$$40 + 42i = 49 + 14\alpha i - \alpha^2 \quad \text{أي}$$

$$40 + 42i = (49 - \alpha^2) + 14\alpha i \quad \text{أي}$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} 49 - \alpha^2 = 40 & (1) \\ 14\alpha = 42 & (2) \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{42}{14} = 3$$

من (2) نجد

$$\alpha = 3 \quad \text{نلاحظ أن (1) محققة من أجل}$$

$$(49 - (3)^2 = 40)$$

$$\alpha = 3 \quad \text{ومن هنا}$$

$$40 + 42i = (7 + 3i)^2$$

المسألة (121)

بين أن المعادلة الآتية

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = 0$$

تقبل حلًا تحليليًا صرفًا. اطلب حلًا تحليليًا



بالمعادلة (1) نجد  $y \in \mathbb{R}$   $iy$

$$(iy)^3 - 4(1-i)(iy)^2 + 16(1-i)iy + 64i = 0$$

$$-iy^3 - 4(1-i)(-y^2) + 16iy + 16y + 64i = 0$$

$$-iy^3 + 4y^2 - 4iy^2 + 16iy + 16y + 64i = 0$$

$$(4y^2 + 16y) + i(-y^3 - 4y^2 + 16y + 64) = 0$$

وبالمعادلة (2) نجد

$$\begin{cases} 4y^2 + 16y = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y^3 - 4y^2 + 16y + 64 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$4y(y+4) = 0 \quad (1) \text{ من (1) نجد } y = 0$$

$$\begin{cases} 4y = 0 \\ y = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

نلاحظ أن  $y = 0$  هو حل للمعادلة (2) لأن

$$\left( \begin{aligned} -0 - 4(0)^2 + 16(0) + 64 &= 0 \\ \text{نلاحظ أن} \end{aligned} \right)$$



ولكن  $\gamma = -4$  مقبول لأن  $\gamma$  يحقق

$$(-4)^3 - 4(-4)^2 + 16(-4) + 64 = 0$$

وهو الحل الحقيقي المبرر هو  $-4i$

(2) بينا أن

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = (z - z_0)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عددان مركبان يطلب تعيينهما

$$z_0 = -4i$$

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = (z + 4i)(z^2 + \alpha z + 16)$$

(11) طريقة هورنر (Horner)

	1	-4	+4i	16-16i	64i	معاملات $P(z)$
$x(-4i)$						
		-4i	16i	-64i		
	1	-4	16	0		معاملات $Q(z)$

$$Q(z) = z^2 - 4z + 16$$

$$z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = (z + 4i)(z^2 - 4z + 16)$$

$$\alpha = -4$$

$$\beta = 16$$



(25) من أجل كل  $z \in \mathbb{C}$  لدينا:

$$\begin{aligned} z^3 - 4(1-z)z^2 + 16(1-i)z + 64i &= (z+4i)(z^2 + \alpha z + \beta) \\ &= z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 4iz^2 + 4i\alpha z + 4\beta i \\ &= z^3 + (\alpha + 4i)z^2 + (\beta + 4i\alpha)z + 4\beta i \end{aligned}$$

وبالمطابقة نحصل:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ \alpha + 4i = -4(1-i) & (1) \\ \beta + 4i\alpha = 16(1-i) & (2) \\ 4\beta i = 64i & (3) \end{cases}$$

$$\alpha = -4 + 4i - 4i \quad \text{من (1) نحصل}$$

$$\alpha = -4 \quad \text{أي}$$

$$\beta = 16 \quad \text{أي} \quad \beta = \frac{64i}{4i} \quad \text{من (3) نحصل}$$

نتحقق من صحة (2)

$$\begin{aligned} \beta + 4i\alpha &= 16 + 4i(-4) \\ &= 16 - 16i \end{aligned}$$

لدينا

$$= 16(1-i) \quad \text{أي (2) صحيحة}$$

$$\alpha = -4 \quad \text{ومنه}$$

$$\beta = 16$$

وبالتالي:  $z^3 - 4(1-z)z^2 + 16(1-i)z + 64i = (z+4i)(z^2 - 4z + 16)$

(3) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة المعطاة

المعادلة تكون:  $(z+4i)(z^2 - 4z + 16) = 0$



$$\begin{cases} z + 4i = 0 & (z = -4i) \text{ أي } z = -4i \text{ أو } z = 0 \\ z^2 - 4z + 16 = 0 \\ z^2 - 4z + 16 = 0 \end{cases}$$

نحل المعادلة  
لـ  $z$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4(1)(16) \\ &= 16 - 64 \\ &= -48 \\ &= 48(-1) \\ &= 48i^2 \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

ومنه

$$z_2 = \frac{4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 2 - 2i\sqrt{3}$$

ومنه  $S$  مجموعة حلول المعادلة  $z^2 - 4z + 16 = 0$

$$S = \{-4i; 2 + 2i\sqrt{3}; 2 - 2i\sqrt{3}\}$$

$$z_A = -4i$$

$$z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$z_C = 2 - 2i\sqrt{3}$$

أي عين واحدة  $G$  مرجح الحالة  $\{(A; 2); (B; -1); (C; 1)\}$

نضج (14)



نقطة مركبة

$$z = x + iy \quad \xrightarrow{\quad} \quad M(x; y)$$

$x \in \mathbb{R}$   
 $y \in \mathbb{R}$

النقطة  $M$  تسمى صورة العدد  $z$   
العدد  $z$  يسمى لاقعة النقطة  $M$   
ونكتب  $M(z)$

$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

لاقعة  $G$  مرجح الديال  $\{ (A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) \}$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$2 + (-1) + 1 = 2 \neq 0$$

نبا أن

إذن  $G$  موجود ووحيد وجعل

$$z_G = \frac{2z_A + (-1)z_B + 1z_C}{2 + (-1) + 1}$$

$$z_G = \frac{2(-4i) + (-1)(2 + 2i\sqrt{3}) + 1(2 - 2i\sqrt{3})}{2}$$

$$z_G = \frac{-8i - 2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3}}{2}$$



$$z_G = \frac{4i\sqrt{3} - 2i}{2}$$

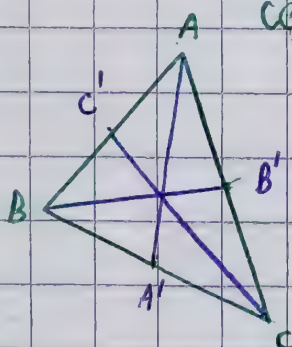
$$z_G = 2i\sqrt{3} - 4i$$

ومنه

$$z_G = (2\sqrt{3} - 4)i$$

G مركز ثقل المثلث ABC

centre de gravité



G مركز ثقل المثلث ABC هو نقطة تقاطع المتوسطات

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \quad (*)$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'} \text{ و } \vec{GA'} = \frac{1}{3} \vec{AA'} \quad (**)$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \quad \text{حيث } z \text{ دالة } G$$

G إحداثيات

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

حيث  $x$  و  $y$  إحداثيات I مركز ثقل المثلث ABC



نمّا أن  $I$  هو مركز ثقل المثلث  $ABC$  إذن

$$Z = \frac{3A + 3B + 3C}{3}$$

$$Z_I = \frac{-4i + 2 - 2i\sqrt{3} + 2 + 2i\sqrt{3}}{3}$$

$$Z_I = \frac{4 - 4i}{3}$$

ومنه:

$$Z_I = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}i$$

التمرين 122

$P(Z)$  كثير حدود المتغير المركب  $Z$  حيث

$$P(Z) = Z^4 + (2-i)Z^3 + Z^2 + (12-i)Z + 20 - 10i$$

بين أن المعادلة  $P(Z) = 0$  تقبل حل حقيقياً  $Z_0$  يطلب تعيينه.

$P(Z) = 0$  حيث  $Z_0 = x$   $x \in \mathbb{R}$  حل حقيقى للمعادلة

$$x^4 + (2-i)x^3 + x^2 + (12-i)x + 20 - 10i = 0$$

$$x^4 + 2x^3 - ix^3 + x^2 + 12x - ix + 20 - 10i = 0$$

$$(x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20) + i(-x^3 - x - 10) = 0$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20 = 0 & (1) \\ -x^3 - x - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20 = 0 & (1) \\ -x^3 - x - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

إذا كانت المعادلة (2) تقبل حلاً حقيقياً فإن هذا

الحل يكون قاسماً لـ 10.



مجموعة قواسم 10 في  $\mathbb{Z}$  هي  $D_{10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$

لأن  $x = -2$  حل للمعادلة  $P(x) = 0$  لأن  $-(-2)^3 - (-2) - 10 = 10 - 10 = 0$

نتحقق من صحة (1) من أجل  $x = -2$  لدينا  $(-2)^4 + 2(-2)^3 + (-2)^2 + 12(-2) + 20 = 16 - 16 + 4 - 24 + 20 = 0$

أي  $x = -2$  هو الحل الحقيقي للمعادلة  $P(x) = 0$

ومنه  $x = -2$  هو الحل الحقيقي للمعادلة  $P(x) = 0$

التمرين 123

في المستوى المركب  $(\sqrt{3}, 0, 1)$

نعتبر النقاط  $A, B, C$  و  $D$  هي الأعداد المركبة

$1+2i, 1+\sqrt{3}+i, 1-2i, 1-\sqrt{3}-i$  على الترتيب

(أ) ما هي طبيعة المثلث  $ABC$  ؟

(ب) أكتب معادلة الدائرة  $(\Gamma)$  المحيطة بالمثلث

$ABC$

(ج) أثبت أن النقطة  $D$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$

(د) أنشئ  $(\Gamma')$  والنقطة  $A, B, C$  و  $D$  في المعام

المعطي

لدينا

$$A(1; 2) \quad \text{أي} \quad z_A = 1+2i$$

$$B(1+\sqrt{3}, 1) \quad \text{أي} \quad z_B = 1+\sqrt{3}+i$$



$$C(1; -2) \quad \text{أي} \quad z_C = 1 - 2i$$

$$D(1+\sqrt{3}; -1) \quad \text{أي} \quad z_D = 1 + \sqrt{3} - i$$

(أ) طبيعة المثلث ABC

$$\rightarrow AB^2 = (1+\sqrt{3}-1)^2 + (1-2)^2 \quad \text{لدينا}$$

$$AB^2 = 3 + 1$$

$$AB^2 = 4$$

$$\rightarrow AC^2 = (1-1)^2 + (-2-2)^2$$

$$AC^2 = 16$$

$$\rightarrow BC^2 = (1-1-\sqrt{3})^2 + (-2-1)^2$$

$$BC^2 = 12$$

$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

بما أن

إذاً ABC مثلث قائم في B

أي طبيعة المثلث ABC

بما أن ABC مثلث قائم في B إذن الدائرة المصاحبة للمثلث

ABC مركزها I منتصف [AC] ونصف قطرها  $R = \frac{AC}{2}$

إحداثيات I

$$I(1; 0) \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$AC^2 = 16$$

$$\text{أي} \quad R = \frac{AC}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ولدينا

$$AC = \sqrt{16} = 4$$



و منتهى مركزه الى  $\phi(\Gamma')$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2$$

$$(\Gamma): x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$$

ج) اريد ان  $DE(\Gamma)$

$$(x_D - 1)^2 + y_D^2 = 4$$

مركز  $DE(\Gamma')$

لهذا

$$\begin{aligned}(x_D - 1)^2 + y_D^2 &= (1 + \sqrt{3} - 1)^2 + (-1)^2 \\&= (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \\&= 3 + 1 \\&= 4\end{aligned}$$

اذن  $DE(\Gamma')$

$$ID = R = 2 \quad \text{مركز } DE(\Gamma') \text{ هو}$$

لهذا

$$ID = \sqrt{(x_D - x_I)^2 + (y_D - y_I)^2}$$

$$= \sqrt{(1 + \sqrt{3} - 1)^2 + (-1 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{3 + 1}$$

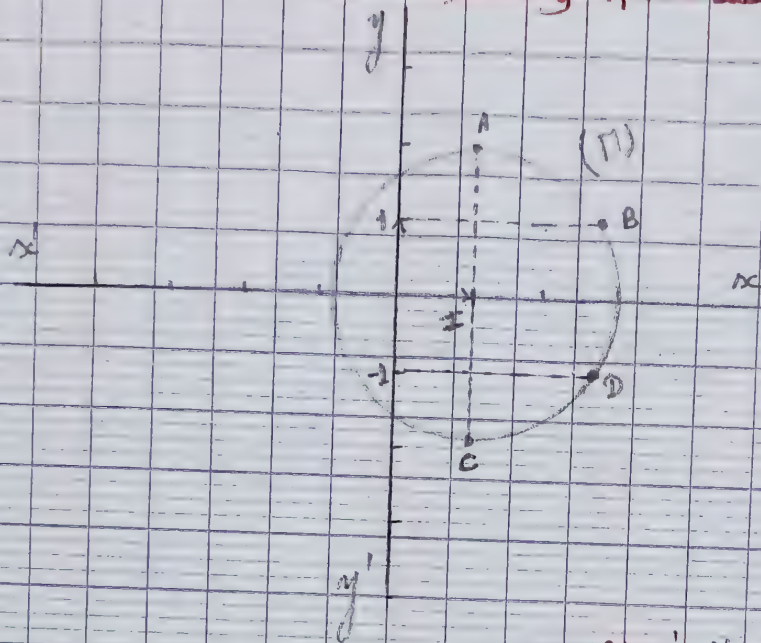
$$= \sqrt{4}$$

$$= 2 = R$$

اذن  $DE(\Gamma')$



١٢٤ إنشاء (٢) والنقطة A, B, C, D



المتغير ١٢٤

ليكن العدد المركب  $z$

$$z = (x^2 + y^2 - 4x + 6y) + i(2xy + 4y)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

١) عين مجموعة النقطة  $M(x, y)$  من المستوى

بحيث يكون  $z$  تخيلياً حقيقياً

٢) عين (E) مجموعة النقطة  $M(x, y)$  من المستوى بحيث

يكون  $z$  حقيقياً



(1) تبين (I)

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$$

z تحيلى صرف معناه

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 0 \quad \text{أى :}$$

$$(x-2)^2 - (2)^2 + (y+3)^2 - (3)^2 = 0 \quad \text{أى :}$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13 \quad \text{أى :}$$

ومنه (I) دائرة مركزها (2, -3)

ونصف قطرها  $R = \sqrt{13}$

(2) تبين (E)

$$2xy + 4y = 0$$

z حقيقى معناه

$$2y(x+2) = 0 \quad \text{أى :}$$

أى :

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ \text{أو} \end{cases}$$

$$x+2=0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \text{أو} \end{cases}$$

$$x = -2$$

أى :

نسبى (D) المستقيم الذى معادله  $x = -2$

$y = 0$  هو معادلة المستقيم  $(x'x)$

$$(E) = (D) \cup (x'x) \quad \text{اذن}$$



التمرين 125

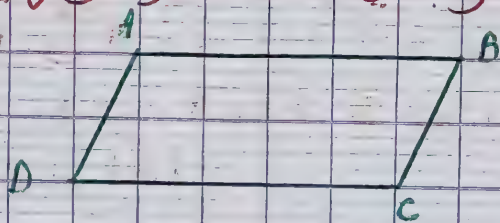
لافتة شعاع  $\vec{AB}$  هي:  $\vec{z}_{AB}$   
صيت:

$$\vec{z}_{AB} = \vec{z}_B - \vec{z}_A$$

A, B, C, D أربع نقط

من المستوى الواحد قفا على الترتيب  $-2+i$ ,  $-1+4i$ ,  $3+2i$  و  $2-i$

برهن أن الرباعي ABCD هو متوازي أضلاع



$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

يعني

ABCD متوازي أضلاع

[AC] و [BD]  
لهما نفس المنتصف

يعني

ABCD متوازي أضلاع

$$\vec{z}_A = -2+i$$

$$\vec{z}_B = -1+4i$$

$$\vec{z}_C = 3+2i$$

$$\vec{z}_D = 2-i$$

لدينا:

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

يعني

ABCD متوازي أضلاع

$$\vec{z}_{AB} = \vec{z}_{DC}$$

أي



$$\vec{z}_{AB} = \vec{z}_B - \vec{z}_A = -1 + 4i - (-2 + i) = 1 + 3i$$

$$\vec{z}_{DC} = \vec{z}_C - \vec{z}_D = 3 + 2i - (2 - i) = 1 + 3i$$

$$\vec{z}_{AB} = \vec{z}_{DC} \quad \text{اذن}$$

ومنه ABCD متوازي أضلاع

المسألة (126)

نجد  $\vec{z}_A, \vec{z}_B, \vec{z}_C$  من الترتيب

لواحق النقطة  $A(\sqrt{3}, 1), B(-\sqrt{3}, -1), C(0, 2)$  و  
عين لإثبات النقطة D حتى يكون الرباعي ABCD

متوازي أضلاع

$$\vec{z}_A = \sqrt{3} + i \quad \text{اذن} \quad A(\sqrt{3}, 1) \quad \text{لدينا}$$

$$\vec{z}_B = -\sqrt{3} - i \quad \text{اذن} \quad B(-\sqrt{3}, -1)$$

$$\vec{z}_C = 2i \quad \text{اذن} \quad C(0, 2)$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \text{يعني} \quad \text{ABCD متوازي أضلاع}$$

$$\vec{z}_{AB} = \vec{z}_{DC}$$

أي

أي

$$\vec{z}_B - \vec{z}_A = \vec{z}_C - \vec{z}_D$$

ومنه

$$\vec{z}_D = \vec{z}_C + \vec{z}_A - \vec{z}_B$$

$$\vec{z}_D = 2i + (\sqrt{3} + i) - (-\sqrt{3} - i)$$

$$\vec{z}_D = 2\sqrt{3} + 4i$$



# مرافق عدد مركب

تعريف:

مرافق العدد المركب  $z = x + iy$  هو  
العدد المركب  $\bar{z}$  (اقرأ  $\bar{z}$  فتحة أو  $\bar{z}$  barre)

حيث:  $\bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = x - iy$   
مرافق  $z$

$z = x + iy$

خواص:

$z \times \bar{z} = x^2 + y^2$  (1)

$\overline{\bar{z}} = z$  (2)

$\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$  (3)

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  (4)

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  (5)

$\bar{z} \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  (6)

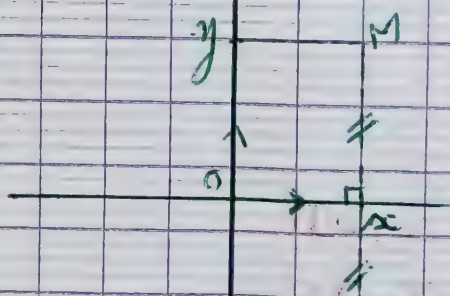
$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$   
 $n \in \mathbb{N}^*$  (7)

$z + \bar{z} = 2x = 2\text{Re}(z)$  (8)

$z - \bar{z} = 2iy = 2i\text{Im}(z)$  (9)

$\bar{\bar{z}} = z$  (10)

$z = x + iy \rightarrow M(x, y)$  (11)  
 $\bar{z} = x - iy \rightarrow M'(x, -y)$



$M$  و  $M'$  متناظرتان بالنسبة  
لـ  $(x, x)$

(12)

$\bar{\bar{z}} = z$

$\bar{z} = \overline{z}$  (13)



التمرين 127

اكتب على الشكل الجبري العدد  $L$  حيث:

$$L = \frac{1+2i}{2-i}$$

لدينا

$$L = \frac{1+2i}{2-i}$$

بعد ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$L = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$

$$L = \frac{2+i+4i-2}{2^2+(-1)^2}$$

$$L = \frac{5i}{5}$$

$$L = i$$

التمرين 128

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة الآتية

$$3iz - 5 = z + 6i - 1$$

المعادلة تكتب:

$$3iz - z = 5 + 6i - 1$$

$$(3i-1)z = 4+6i$$

$$z = \frac{4+6i}{3i-1}$$



$$z = \frac{(4+6i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}$$

$$z = \frac{-4-6i-12i+18}{(-1)^2+(3)^2}$$

$$z = \frac{14-18i}{10}$$

ومنه:

$$z = \frac{7}{5} - \frac{9}{5}i$$

المسألة 129

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة الآتية

$$z^2 - 3\bar{z} + 2 = 0$$

$$z = x + iy$$

نضع

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z} = x - iy$$

اذن

ومنه المعادلة المعطاة تكتب

$$(x + iy)^2 - 3(x - iy) + 2 = 0$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 - 3x + 3iy + 2 = 0$$

$$(x^2 - 3x - y^2 + 2) + i(2xy + 3y) = 0$$

وبالمطابقة نحصل

$$\begin{cases} x^2 - 3x - y^2 + 2 = 0 \quad (1) \\ 2xy + 3y = 0 \quad (2) \end{cases}$$



$$y(2x+3) = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2x+3=0 \end{cases}$$

(2) كافى

ان:

اي:

$$\begin{cases} y=0 \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

باز اكان  $y=0$  فان (1) تصبح

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} z_1 = 1 + 0i = 1 \\ z_2 = 2 + 0i = 2 \end{cases}$$

(1) اذا كان  $x = -\frac{3}{2}$  فان (1) تصبح

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) - y^2 + 2 = 0$$

$$y^2 = \frac{35}{4}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{35}}{2} \\ y = -\sqrt{\frac{35}{4}} = -\frac{\sqrt{35}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} z_3 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2} \\ z_4 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

ومنه (١) مجموعة حلول المعادلة المعطاة:

$$S = \left\{ 1; 2; -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{35}}{2}; -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{35}}{2} \right\}$$

المسألة ١٣٥  
في المستوى المركب، لاحقة نقطة  $M$  هي العدد المركب

$$z = x + iy \quad \text{حيث } x \in \mathbb{R} \text{ و } y \in \mathbb{R}$$

ترفق بكل عدد مركب  $z$  العدد المركب  $L$  حيث:

$$L = 2z \times \bar{z} + iz - (2+i)\bar{z} - 7 + 2i$$

١) اكتب  $L$  على الشكل الجبري

٢) عينا وارسم المجموعة  $(E_1)$  للنقطة  $M$  في المستوى

حيث يكون  $L$  عددًا حقيقيًا

٣) عينا وارسم المجموعة  $(E_2)$  للنقطة  $M$  في المستوى حيث

يكون  $L$  عددًا تخيليا صريحا

١) كتاب  $L$  على الشكل الجبري

$$L = 2z \times \bar{z} + iz - (2+i)\bar{z} - 7 + 2i$$

$$L = 2(x^2 + y^2) + i(x + iy) - (2+i)(x - iy) - 7 + 2i$$

$$L = 2x^2 + 2y^2 + ix - y - 2x + 2iy - ix - y - 7 + 2i$$

$$L = (2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 7) + i(2y + 1)$$



(2) تحديد  $(E_1)$

الحقيق معناه  $2y + 2 = 0$

أو  $y = -1$

ومنه  $(E_1)$  هو المستقيم الذي معادلته  $y = -1$

(3) تحديد  $(E_2)$

الحقيق معناه  $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

أي  $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$  بقسمة الطرفين

على 2

$$(x^2 - x) + (y^2 - y) - \frac{7}{2} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2} = 0$$

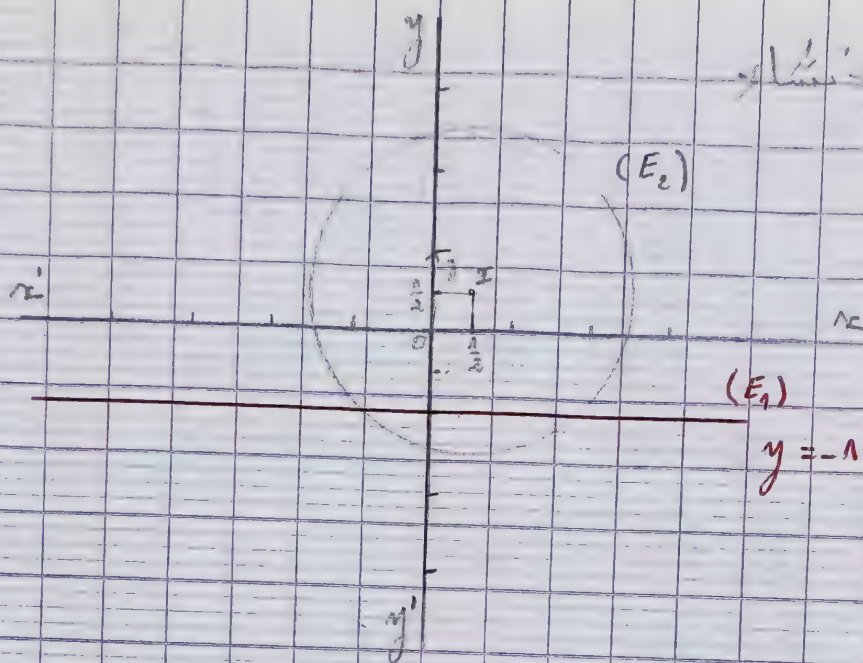
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{14}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

اذن  $(E_2)$  دائرة مركزها  $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  ونصف

قطرها  $R = \sqrt{4} = 2$





التصنيف 131

المستوي المركب مغسوب إلى معلم سقائد ومتجانس  $(0, \vec{u}, \vec{v})$   
 نقطة  $M$  لا حقتها العدد المركب  $z$

حيث  $z = x + iy$  و  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in \mathbb{R}$   
 من أجل كل عدد مركب  $z$  يختلف عن 0  
 نعتبر العدد المركب التالي

$$z' = \frac{5z - 2}{z - 1}$$

$$z' = \frac{5z - 2}{z - 1}$$

- 1) اكتب  $z'$  و  $\bar{z}'$  بدلالة  $z$  و  $\bar{z}$
- 2) عين مجموعة النقاط  $M$  ذات اللاحقة  $z'$  في كل حالة من الحالات التالية ثم مثلها:
- أ)  $z'$  حقيقي



بنا  $z'$  تعينى صيف

١) كتابة  $z' + \bar{z}$  بهلالة  $z$  و  $\bar{z}$   
من أجل  $z \neq 1$  لدينا:

$$\bar{z}' = \left( \frac{5z-2}{z-1} \right)$$

$$= \frac{(5z-2)}{(z-1)}$$

$$= \frac{5z-2}{(z-1)}$$

$$= \frac{5z-2}{\bar{z}-1}$$

$$= \frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1}$$

$$z' + \bar{z}' = \frac{5z-2}{z-1} + \frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1} \quad \text{ومنه}$$

$$= \frac{(5z-2)(\bar{z}-1) + (5\bar{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{5z\bar{z} - 5z - 2\bar{z} + 2 + 5\bar{z}z - 5\bar{z} - 2z + 2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{10z\bar{z} - 7z - 7\bar{z} + 4}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

٢) كتابة  $z' - \bar{z}'$  بهلالة  $z$  و  $\bar{z}$   
من أجل  $z \neq 1$  لدينا:

$$z' - \bar{z}' = \frac{5z-2}{z-1} - \frac{5\bar{z}-2}{\bar{z}-1}$$



$$= \frac{5z\bar{z} - 5z - 2\bar{z} + 2 - 5\bar{z}z + 5\bar{z} + 2z - 2}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$$= \frac{-3z + 3\bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

(2) أ) من أجل  $z \neq 1$   
 لدينا  $z' = \bar{z}$  حقيقي معناه  
 $z' = \bar{z}$  أي  $z' = \bar{z}$   

$$\frac{-3z + 3\bar{z}}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$$

$$-3z + 3\bar{z} = 0$$

$$\bar{z} = z$$

$$x - iy = x + iy$$

$$2iy = 0$$

$$y = 0$$

ومنه مجموعة النقط المطلوبة

$$(x, x) = \{A\}$$

حيث  $A(1, 0)$

(3) من أجل  $z \neq 1$   
 لدينا  $z'$  تخيلي حريف معناه  
 $z' = -\bar{z}$  أي  $z' = -\bar{z}$   

$$\frac{10z\bar{z} - 7z - 7\bar{z} + 4}{(z-1)(\bar{z}-1)} = 0$$



$$10\bar{3}\bar{3} - 7\bar{3} - 7\bar{3} + 4 = 0$$

$$10(x^2 + y^2) - 7(2x) + 4 = 0$$

$$10x^2 + 10y^2 - 14x + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$(x^2 - \frac{7}{5}x) + y^2 + \frac{2}{5} = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})^2 - (\frac{7}{10})^2 + y^2 + \frac{2}{5} = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})^2 + y^2 - \frac{49}{100} + \frac{40}{100} = 0$$

$$(x - \frac{7}{10})^2 + y^2 = \frac{9}{100}$$

معادلة دائرة (C) مركزها  $(\frac{7}{10}, 0)$  ونصف قطرها

$$R = \sqrt{\frac{9}{100}}$$

$$R = \frac{3}{10}$$

من النقطة  $A(1, 0)$  ننسحب إلى (C)

لدينا

$$(1 - \frac{7}{10})^2 + 0^2 = (\frac{10-7}{10})^2$$

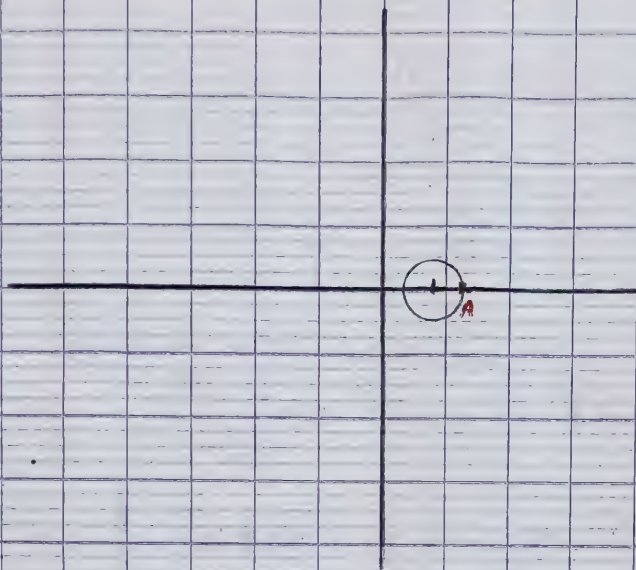
$$= (\frac{3}{10})^2$$

$$= \frac{9}{100}$$

إذن  $AE(C)$  ومنه مجموعة النقاط المطلوبة



$$A(1;0) \text{ مع } (C) = \{A\}$$



التعريف 132

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعاقد والمتجانس  $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  يغطي النقطة  $w(1; 2; 2)$  والمستوى  $(P)$  ذو المعادلة

$$x - 2y + 3z - 3 = 0$$

أكتب معادلة الكرة  $(S)$  التي مركزها  $w$  وتصل إلى المستوى

(P)

$$d[w; (P)] = R \text{ معناه } (S) \text{ معناه } (P)$$

لدينا

$$R = d[w; (P)] = \frac{|x_w - 2y_w + 3z_w - 3|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (3)^2}}$$



$$= \frac{|1 - 2(2) + 2 - 3|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|-4|}{\sqrt{6}}$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

ومنه معادلة (S) هي

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + 1 + 4 + 4 - \frac{16}{6} = 0$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z + \frac{19}{3} = 0$$

(2) عينا إحداثيات النقطة A نقطة تماس الكرة (S) والمستوى (P)

ليكن (Δ) المستقيم العمودي على (P) ويمر بـ A نقطة تماس (S) و (P) هي نقطة تقاطع

(P) و (Δ)

بما أن (P) ⊥ (Δ)، إذن  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  شعاع داخلي لـ (P) هو شعاع توجيه (Δ)



أي تمثيل وسيحي  $\Delta$  هو:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

إحداثيات  $A$  هي حلول المعادلة

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 2+t \\ x-2y+z-3=0 \end{cases}$$

بعد التعويض في معادلة (P) نجد

$$6t-4=0 \quad \text{أي} \quad 1+t-2(2-2t)+2+t-3=0$$
$$t = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3} \\ y = 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) \\ z = 2 + \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$A\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right) \quad \text{أي}$$



## طويلة عدد مركب

تعريف:  $z = x + iy$  حيث  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in \mathbb{R}$   
 طول  $z$  يعرف بالليها:  $|z|$   
 وليدنيا:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

خواص

$$|z| \geq 0 \quad (1)$$

$$|z \times \bar{z}| = |z|^2 \quad (2)$$

$$|\bar{z}| = |z| \quad (3)$$

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad (4)$$

$$z \neq 0 \text{ مع } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad (5)$$

$$z_2 \neq 0 \text{ مع } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (6)$$

$$|0| = 0 \quad (14) \text{ مع } n \in \mathbb{N}^* \quad |z|^n = |z|^n \quad (7)$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

$$|z| = |x| \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$$



التمرين (133)

احسب الطويلة لكل عدد من الأعداد المركبة الآتية :

$$z = 4 - 3i \quad (1)$$

$$z = -6i \quad (2)$$

$$z = -2 \quad (3)$$

$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$z = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad (5)$$

(1) لدينا  $z = 4 - 3i$  إذن

$$|z| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$$

$$|z| = \sqrt{16 + 9}$$

$$|z| = \sqrt{25} = 5$$

(2) لدينا  $z = -6i$  إذن

$$|z| = |-6i|$$

$$= |-6| \times |i| = 6$$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

(3) لدينا  $z = -2$  إذن

$$|z| = |-2| = 2$$



$$z = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$$

(4) لدينا

(18) لدينا

$$|z| = \left| \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \right|$$

$$= \frac{|\sqrt{6} - i\sqrt{2}|}{|2|}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{2} - \sqrt{3} + i\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

(5) لدينا

إذن:

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}$$

$$|z| = \sqrt{2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}} = \sqrt{4} = 2$$

التمرين (134)

احسب الطول لكل من الأعداد المركبة الآتية

$$z = (1 + i\sqrt{3})^{12} \quad (1)$$

$$z = \frac{2i(1 - i\sqrt{2})}{3 + 2i} \quad (2)$$



$$z = (3+4i)(1-2i)(5+i) \quad (3)$$

$$z = \frac{-3}{(3-i)^5} \quad (4)$$

$$|z| = |(1+i\sqrt{3})^{12}| \quad (1) \text{ لدينا}$$

$$|z| = |1+i\sqrt{3}|^{12}$$

$$|z| = 2^{12} \quad \text{بإ}$$

$$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|z| = \left| \frac{2i(1-i\sqrt{2})}{3+2i} \right| \quad (2) \text{ لدينا}$$

$$|z| = \frac{|2i(1-i\sqrt{2})|}{|3+2i|}$$

$$|z| = \frac{|2i| \times |1-i\sqrt{2}|}{\sqrt{3^2 + 2^2}}$$

$$|z| = \frac{2 \times \sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2}}{\sqrt{13}}$$

$$|z| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$|z| = |(3+4i)(1-2i)(5+i)| \quad (3) \text{ لدينا}$$

$$|z| = |3+4i| \times |1-2i| \times |5+i|$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} \times \sqrt{1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{5^2 + 1^2}$$

$$|z| = \sqrt{25} \times \sqrt{5} \times \sqrt{26}$$



$$|z| = 5\sqrt{130}$$

(4) لدينا ،

$$|z| = \left| \frac{-3}{(3-i)^5} \right|$$

$$|z| = \frac{|-3|}{|(3-i)^5|}$$

$$|z| = \frac{3}{|3-i|^5}$$

$$|z| = \frac{3}{(\sqrt{3^2 + (-1)^2})^5}$$

$$|z| = \frac{3}{(\sqrt{10})^5}$$

المسألة (132)

عين (C) مجموعة النقاط M ذات الأجزاء

التي  $z = x+iy$  مع  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in \mathbb{R}$

$$|z - 3 + 2i| = |z - 1 - i|$$

$$|z - 3 + 2i| = |z - 1 - i|$$

$$|z - (3 - 2i)| = |z - (1 + i)|$$

$$z_A = 3 - 2i \quad z_B = 1 + i$$

$$z_B = 1 + i$$

$$AM = BM$$



ومنه (C) محور الفلكية [10]

التمرين 136

عينا (C) مجموعة النقاط M ذات الإحداثيات  $z = x + iy$  و  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in \mathbb{R}$

(\*)  $|z - 3 + 2i| = |2z - 1 - i|$  المق

1)  $z - 3 + 2i = x + iy - 3 + 2i$  لدينا:

$z - 3 + 2i = (x - 3) + i(y + 2)$

$|z - 3 + 2i| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2}$  ومنه:

2)  $2z - 1 - i = 2(x + iy) - 1 - i$

$= 2x + 2iy - 1 - i$

$= (2x - 1) + i(2y - 1)$

$|2z - 1 - i| = \sqrt{(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2}$  ومنه

ومنه (\*) متكافئ  $\sqrt{(x - 3)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2}$

أي

بعد توزيع الطرفين  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = (2x - 1)^2 + (2y - 1)^2$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1$

$3x^2 - 8y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$  أب

بعد قسمة الطرفين  $x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}y - \frac{11}{3} = 0$

$(x^2 + \frac{2}{3}x) + (y^2 - \frac{8}{3}y) - \frac{11}{3} = 0$



$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{11}{3} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{16}{9} - \frac{33}{9} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$$

ومنه (C) دائرة مركزها  $W\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$  ونصف

$$R = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \text{ قطرها}$$

التمرين (137)

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة الآتية :

$$(E) : |z|^2 + \bar{z}^2 - 8 + 4i = 0$$

$$\begin{matrix} x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \text{نضع} \quad z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{اذن}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$

ومنه (E) يكتب :

$$x^2 + y^2 + (x - iy)^2 - 8 + 4i = 0$$

$$x^2 + y^2 + x^2 - 2xyi - y^2 - 8 + 4i = 0$$

$$(2x^2 - 8) + i(-2xy + 4) = 0$$

وبالمطابقة نحصل :



$$\begin{cases} 2x^2 - 2 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2xy + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \quad (1) \text{ تكافؤ}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

بإذا كان  $x = 1$  فإن (2) تكتب أي  $-4y + 4 = 0$   
 $y = 1$

ومنه

$$z_1 = 1 + i$$

بإذا كان  $x = -1$  فإن (2) تكتب أي  $-4y + 4 = 0$   
 $y = -1$

$$z_2 = -1 - i \quad \text{ومنه}$$

وبالتالي:

$$S = \{1 + i, -1 - i\}$$



المسألة 138

نحسب المسافات  $A, B, C$  ذات المواضع  $z_A = 2$

$$z_B = -i \text{ و } z_C = 1 + 2i$$

أحسب  $|z_A - z_B|$  و  $|z_A - z_C|$  و  $|z_B - z_C|$

هل المثلث  $ABC$  متساوي الساقين؟

$$|z_A - z_B| = |2 + i| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{5} \quad \text{لدينا}$$

$$|z_B - z_C| = |-i - 1 - 2i| = |-1 - 3i| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$|z_A - z_C| = |2 - 1 - 2i| = |1 - 2i| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

هل المثلث  $ABC$  متساوي الساقين؟

$$|z_A - z_B| = AB = \sqrt{5}$$

$$|z_B - z_C| = BC = \sqrt{10}$$

$$|z_A - z_C| = AC = \sqrt{5}$$

$$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2 \quad \text{أي } AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{و}$$

إذن  $ABC$  مثلث قائم في  $A$  ومتساوي الساقين



التحريك 139

A, B, C نقطة من المستوى المربك لواحدها 3، 2، 1 و  $3i$  و  $2i$

على الترتيب

عينة لائحة النقط  $G$  مرجح الصالة المثانة  
 $\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$

عينة (C) مجموعة النقط M من المستوى التي يكون من  
 $AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$  أصلها

(1) نعين  $\vec{z}_G$

بما أن  $1 + 2 + (-2) \neq 0$  إذن  $G$  موجود ووحيد

$$\vec{z}_G = \frac{1\vec{z}_A + 2\vec{z}_B - 2\vec{z}_C}{1 + 2 + (-2)}$$

ولدينا

$$\vec{z}_G = \frac{1(3i) + 2(-3i) - 2(2 - 3i)}{1}$$

$$\vec{z}_G = 3i - 6i - 4 + 6i$$

$$\vec{z}_G = -4 + 3i$$

ومنه

$$\vec{AB} = \vec{AB} = AB$$

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

$$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$$

حيث  $G$  مرجح الصالة

علاقة Leibnitz



(2) نفحص (C)

$$AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$$

لدينا (ط)

$$(1+2-2)MG^2 + AG^2 + 2BG^2 - 2CG^2 = 25$$

نكتب:

(Leibnitz's theorem)

$$MG^2 + 16 + 2(52) - 2(72) = 25$$

أو

$$MG^2 = 49$$

$$MG = 7$$

أي

ومنه (C) دائرة مركزها

G(-4, 3) ونصف قطرها

$$R = 7$$

$$\begin{aligned} \text{1) } AG^2 &= |z_G - z_A|^2 \\ &= |-4 + 3i - 3i|^2 \\ &= (-4)^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) } BG^2 &= |z_G - z_B|^2 \\ &= |-4 + 3i + 3i|^2 \\ &= |-4 + 6i|^2 \\ &= (-4)^2 + (6)^2 \\ &= 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3) } CG^2 &= |z_G - z_C|^2 \\ &= |-4 + 3i - 2 + 3i|^2 \\ &= |-6 + 6i|^2 \\ &= (-6)^2 + (6)^2 \\ &= 72 \end{aligned}$$



(2) تعیین (C)

$$AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25 \quad (2b)$$

نکته:  $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 - 2|z - z_C|^2 = 25$  حيث  $z$  نقطة M

بما

$$x^2 + (y-3)^2 + 2[x^2 + (y+3)^2] - 2[(x-2)^2 + (y+3)^2] = 25$$

$$z - z_A = x + iy - 3i$$

$$z - z_A = x + i(y-3)$$

$$|z - z_A|^2 = (\sqrt{x^2 + (y-3)^2})^2$$

$$z - z_B = x + iy + 3i$$

$$z - z_B = x + i(y+3)$$

$$|z - z_B|^2 = (\sqrt{x^2 + (y+3)^2})^2$$

$$z - z_C = x + iy - 2 + 3i$$

$$z - z_C = (x-2) + i(y+3)$$

$$|z - z_C|^2 = (\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 + 2x^2 + 2y^2 + 12y + 18 - 2x^2 - 4x + 4 - 2y^2 - 12y - 18 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$$

$$(x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) - 24 = 0$$

$$(x+4)^2 - (4)^2 + (y-3)^2 - (3)^2 - 24 = 0$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 49$$

ومنه (C) دائرة مركزها  $G(-4, 3)$

$$R = \sqrt{49} \text{ نصف قطرها}$$

$$= 7$$

3b

$$AM^2 + 2BM^2 - 2CM^2 = 25$$

$$AM^2 = (x-0)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9$$

$$BM^2 = (x-0)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$CM^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$$

$$A(0; 3)$$

$$B(0; -3)$$

$$C(2; -3)$$



وحدہ :  $AM^2 + BM^2 - CM^2 = 25$  تکلیف :

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 + 2(x^2 + y^2 + 6y + 9) - 2(x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13) = 25$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$$

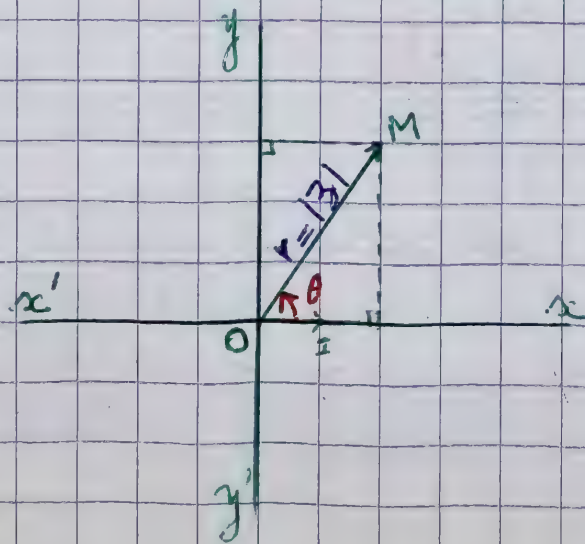
عدد مرکب  
غیر معلوم

تعریف :  $z = x + iy$  عدد مرکب غیر معلوم محور  $M$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

نسبت  $z$  اور  $Arg(z)$  کل (قوس)  $(OI, OM)$  للزاوية الموجبة





ملاحظات:

- 1) كل عدد مركب غير صفري له عدد غير منته من القواسم
- 2) إذا كان  $\theta$  عددًا حقيقيًا فإن  $z = e^{i\theta}$  مع  $\theta \in \mathbb{R}$
- 3)  $A$  و  $B$  نقطتان لا تقعان على الترتيب  $z_A$  و  $z_B$  على الترتيب

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) = \text{Arg}(z_B) - \text{Arg}(z_A)$$

$$\text{Arg}(z_B z_A) = (\vec{OI}, \vec{AB})$$

الشكل الثلاثي  $OAB$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ r &= |z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \text{Arg}(z) \end{aligned}$$

التعويض (140)

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{الشكل الأسي} \quad r > 0$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

صيغة Euler



التمرين 140

الكتب على الشكل المتعلق ثم الأسي كل عدد من الأعداد المركبة الآتية

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$z_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$z_4 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$|z_1| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{عدد } z_1 \text{ تحقق}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ k \in \pi \end{cases}$$

ومن الشكل المتعلق

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

والشكل الأسي هو

$$z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$|z_2| = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{عدد } z_2 \text{ تحقق}$$

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \begin{cases} \cos \theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad \text{ومن الشكل المتعلق هو}$$



$$z_2 = e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

والشكل الأسّي هو

$$|z_3| = 1$$

(3) لدينا

$$\begin{cases} \cos \theta_3 = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\theta_3$  عمدة  $z_3$  تحقق

$$\sin \theta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta_3 = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

أي

$$\theta_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

ومنه الشكل المتناسق هو

$$z_3 = e^{i \frac{4\pi}{3}} = e^{i \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}$$

$$z_3 = e^{i \frac{4\pi}{3}}$$

والشكل الأسّي هو

$$|z_4| = 1$$

(4) لدينا  $\theta_4$  عمدة  $z_4$  تحقق

$$\begin{cases} \cos \theta_4 = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\theta_4 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

أي

$$k \in \mathbb{Z}$$

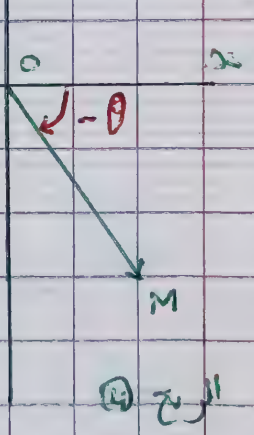
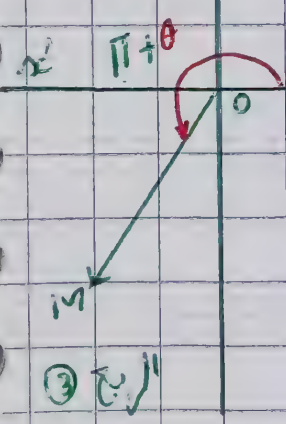
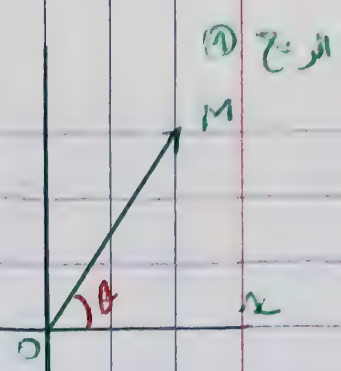
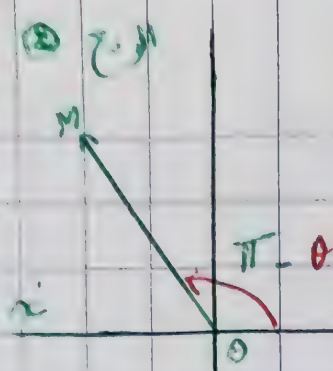
ومنه الشكل المتناسق هو

$$z_4 = e^{i \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)}$$

$$z_4 = e^{-i \frac{\pi}{3}}$$

والشكل الأسّي هو







المقرر 141

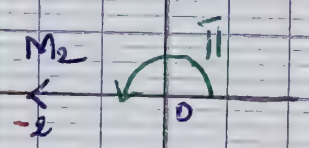
الكتاب على الشكل المتلبي والشكل الأساسي لإعداد من الأعداد المركبة الأربعة

① لدينا  $z_1 = 3$   $z_2 = -2$   $z_3 = 2i$   $z_4 = -5i$

$|z_1| = |3| = 3$

$\theta_1 = (\vec{OI}, \vec{OM}_1) = 0 + 2k\pi$

أي الشكل المتلبي هو  $z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$   
 أي الشكل الأساسي هو  $z_1 = 3e^{i0}$



② لدينا  $|z_2| = |-2| = 2$

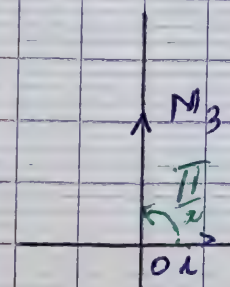
$\theta_2 = (\vec{OI}, \vec{OM}_2) = \pi + 2k\pi$  و

ومنه الشكل المتلبي هو

$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$

والشكل الأساسي هو

$z_2 = 2e^{i\pi}$



③ لدينا

$|z_3| = |2i| = 2$

$\theta_3 = (\vec{OI}, \vec{OM}_3) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  و

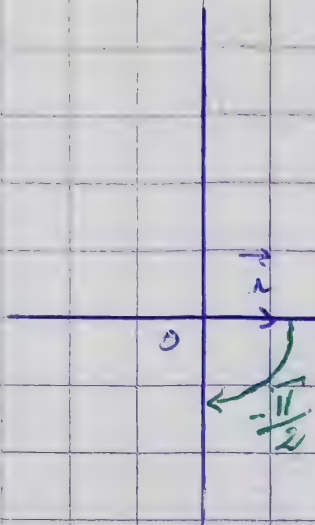
ومنه الشكل المتلبي هو

$z_3 = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$



والشكل الأسّي هو :

$$z_3 = e e^{i \frac{\pi}{3}}$$



$$z_4 = -5i \quad (4)$$

$$|z_4| = |-5i| = |-5| = 5$$

$$\theta_4 = (\vec{i}, \vec{OM}_4)$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + e k \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ومن الشكل الناتج هو :

$$z_4 = 5 \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

والشكل الأسّي هو :

$$z_4 = 5 e^{-i \frac{\pi}{2}}$$

التمرين (142)

على الطاولة وعمدة لكل عدد من الأعداد المركبة  
الآتية :

$$z_1 = -3 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad (1)$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad (2)$$

$$z_3 = \sqrt{5} \left( -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad (3)$$

$$z_4 = \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \quad (4)$$



$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$z_1 = -3 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{L.S. 1 (1)}$$

$$z_1 = 3 \left( -\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{L.S. 2}$$

$$z_1 = 3 \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$z_1 = 3 \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \quad \text{L.S. 3}$$

$$|z_1| = 3$$

$$\text{Arg}(z_1) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{L.S. 1 (2)}$$

$$z_2 = 2 \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right] \quad \text{L.S. 2}$$

$$|z_2| = 2$$

$$\text{Arg}(z_2) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$z_3 = \sqrt{5} \left( -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{L.S. 1 (3)}$$

$$z_3 = \sqrt{5} \left[ \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$z_3 = \sqrt{5} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{L.S. 2}$$

$$|z_3| = \sqrt{5}$$

$$\text{Arg}(z_3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\begin{aligned}
 z_4 &= \sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} & \text{L.S. 1(4)} \\
 z_4 &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \\
 z_4 &= \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \\
 \text{Arg}(z_4) &= \frac{3\pi}{8} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\
 |z_4| &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \cos \alpha \\
 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) &= \sin \alpha
 \end{aligned}$$

المسألة 143  
عني فسيكون أسبانيا لكل عدد من الأعداد السابقة

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -3e^{i\frac{\pi}{2}} & (1) \\
 z_2 &= 2ie^{i\frac{\pi}{3}} & (2) \\
 z_3 &= (2\sqrt{3} + 6i)e^{i\frac{\pi}{2}} & (3) \\
 z_4 &= (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}
 \end{aligned}$$

$$-3 = 3e^{i\pi} \quad \text{L.S. 1(1)}$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= -3e^{i\frac{\pi}{2}} \\
 z_1 &= 3e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{2}} \\
 z_1 &= 3e^{i\pi + i\frac{\pi}{2}} \\
 z_1 &= 3e^{i\frac{3\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

$$2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{L.S. 1(2)}$$

$$\begin{aligned}
 z_2 &= 2ie^{i\frac{\pi}{3}} \\
 z_2 &= 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} \\
 z_2 &= 2e^{i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{3}} \\
 z_2 &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}
 \end{aligned}$$



(3) نكتب  $2\sqrt{3} + 6i$  على الشكل الأسّي

$$|2\sqrt{3} + 6i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 6^2} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

وبالـ  $\omega_3 = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\omega_3 = 4\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{3} + i\frac{\pi}{2}}$$

وبالـ  $\omega_3 = 4\sqrt{3} e^{i\frac{5\pi}{6}}$

(4) لدينا  $1 - \sqrt{2} = |1 - \sqrt{2}| e^{i\pi}$

$$1 - \sqrt{2} = (-1 + \sqrt{2}) e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= (-1 + \sqrt{2}) e^{i\pi + i\frac{\pi}{4}}$$

$$\omega_4 = (-1 + \sqrt{2}) e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

المسألة 144  
أكتب على الشكل الجبري كل عدد من الأعداد المركبة الآتية

1  $\omega_1 = 6 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2  $\omega_2 = \sqrt{5} e^{i\frac{3\pi}{2}}$

3  $\omega_3 = \frac{1}{2} e^{i\pi}$

4  $\omega_4 = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

لدينا 1  $\omega_1 = 6 e^{i\frac{3\pi}{4}}$

نكتب  $\omega_1 = 6 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

$\omega_1 = 6 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$



$$z_1 = 6 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$z_1 = -3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \quad \text{ناتج}$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \left( \frac{4\pi - \pi}{4} \right) \quad \text{ناتج}$$

$$= \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left( \frac{4\pi - \pi}{4} \right)$$

$$= \sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ناتج 2

$$z_2 = \sqrt{5} e^{i \frac{3\pi}{2}}$$

$$z_2 = \sqrt{5} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{ناتج}$$

$$z_2 = \sqrt{5} (0 + i(-1))$$

$$z_2 = -\sqrt{5} i$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

ناتج

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

ناتج 3

$$z_3 = \frac{1}{2} e^{i\pi}$$

$$z_3 = \frac{1}{2} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$z_3 = \frac{1}{2} (-1 + i \cdot 0)$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \pi = -1 \quad \text{ناتج}$$

$$\sin \pi = 0$$



14 لدا

$$\begin{aligned} z_4 &= 2\sqrt{3} e^{-i\frac{5\pi}{6}} \\ z_4 &= 2\sqrt{3} \left[ \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right] \\ z_4 &= 2\sqrt{3} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ z_4 &= -3 - i\sqrt{3} \end{aligned}$$

التعرف (14)

حل في  $\mathbb{C}^2$  المعادلة الآتية

$$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$

المعادلة تنقسم

$$\begin{cases} 2iz + iz' = 2i^2 \\ 3z - iz' = 1 \end{cases} \quad \text{بعد ضرب الطرفين في } i$$

$$\begin{cases} -2z + iz' = -2 \\ 3z - iz' = 1 \end{cases} \quad \text{بعد ضرب الطرفين في } i$$

وبعد الجمع طرفاً لطرفاً نجد

$$\begin{aligned} z &= -1 \\ 3z - iz' &= 1 \end{aligned}$$

وبالنعوض في

$$3(1) - iz' = 1$$

نجد

$$-iz' = 1 + 3$$

$$-iz' = 4$$

$$z' = \frac{4}{-i} = \frac{4i}{-i^2}$$

$$z' = 4i$$



$$S = \{(-1; 41)\} \quad \text{ومنه}$$

التمرين 146

I لتكن والدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$$

نريد أن نثبت أن الدالة زوجية

g زوجية معناه من أجل  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (-x) \in \mathbb{R} \quad (\text{مفقعة}) \\ g(-x) = g(x) \end{cases}$$

لدينا

$$g(-x) = \frac{e^{(-x)^2}}{(-x)^2+1} - \ln((-x)^2+1)$$

$$g(-x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1} - \ln(x^2+1) \quad \text{لأن } x^2 = (-x)^2$$

$$g(-x) = g(x) \quad \text{أي: } g \text{ زوجية}$$

(2) أدرس تغيرات الدالة g على المجال  $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

= e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty$$



$$g(0) = \frac{2(0)^2}{0^2+1} - \ln(0^2+1)$$

$$g(0) = -\ln 1$$

$$g(0) = 0 \quad \text{أى}$$

$x \mapsto \frac{2x^2}{x^2+1}$  متوحد الـ  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$   $g$  قبل الاشتقاق على  $[0; +\infty[$

$x \mapsto -\ln(x^2+1)$

القابلية للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x \times 2x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1}$$

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+1)}$$

$$g'(x) = \frac{4x - 2x^3 - 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^2+1 = 1^2 - x^2$$

$$= (1-x)(1+x)$$

$$\text{أي } g'(x) = \frac{2x(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

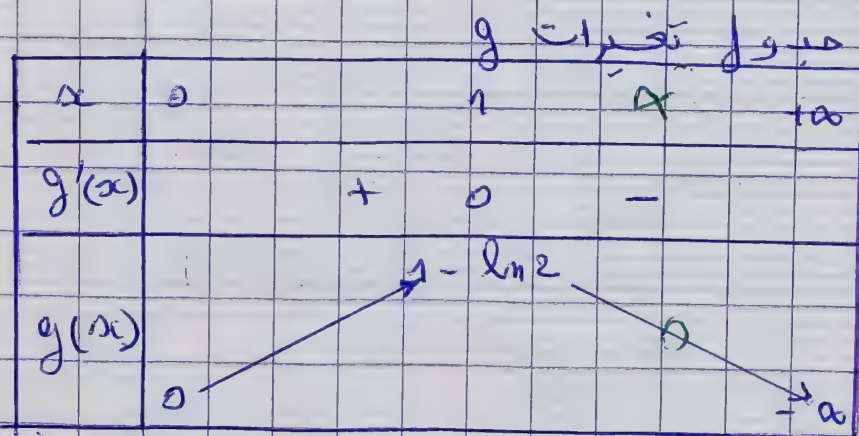
$1-x$   $\neq 0$   $\forall x \in [0; +\infty[$   $\text{أى } g'(x) > 0 \text{ على } [0; +\infty[$



$(x^2+1)^2 > 0$  و  $1+x > 0$  و  $2x \geq 0$  لأن  $x \geq 0$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -

$g$  متزايدة تمامًا على  $[0, 1]$   
 $g$  متناقصة تمامًا على  $[1, +\infty[$



$$g(1) = \frac{2(1)^2}{(1)^2+1} - \ln(1^2+1)$$

$$g(1) = 1 - \ln 2$$

(3) بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل على المجال  $[\frac{7}{4}, 2]$

حل وحيداً  $x$

بما أن  $g$  مستمرة ومتناقصة تمامًا على  $[\frac{7}{4}, 2]$   
 (جزء من  $[1, +\infty[$ )



$$g\left(\frac{7}{4}\right) = 0,1 \quad \text{أب} \\ g\left(\frac{7}{4}\right) \times g(2) < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} g(2) = -0,01 \end{array} \right. \quad \text{ج}$$

أب حسب مبرهنة القيمة المتوسطة المعادلات  
 $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $\left[\frac{7}{4}, 2\right]$   
 (4) استنتج حسب قيم  $x$  إشارة  $g(x)$  على المجال  $[0, +\infty[$

حسب الجدول السابق لدينا

$x$	0	$\alpha'$	$+\infty$
$g(x)$	0	+	-

II نعتبر الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \ln(x^2 + 1); & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C<sub>f</sub>) منحرف الدالة في مستوي مرود بعلم متعامد ومتجانس  
 $(0, \vec{i}, \vec{j})$

أ) بين أن الدالة فردية

$x \in \mathbb{R}$  فردية معناه من أجل كل

$$\begin{cases} (-x) \in \mathbb{R} \quad (\text{معرفة}) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

لدينا

$$f(-x) = \frac{1}{-x} \ln((-x)^2 + 1)$$

$$f(-x) = -\frac{1}{x} \ln(x^2 + 1)$$

أي

$$f(-x) = -f(x)$$



ومنه  $f$  فردية (أي  $0$  مركز تماثل  $(c, f)$ )  
 (2) أدركت استمرارية الدالة  $f$  وقابلية  
 اشتقاقها عند  $0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0 \text{ مع } 0 \text{ مع } 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x^2 + 1)$$

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \square)}{\square} \quad \text{ع } x \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} \times x$$

$$= 1 \times 0$$

$$= 0$$

إذاً  $f$  مستمرة عند  $0$

$f$  قابلة للاشتقاق مع  $0$  مع  $0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(x^2 + 1) - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

$$= 1$$



و هو  $f'(0) = 1$  و لا بد

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  حساب

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x^2 + 1) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[x^2(1 + \frac{1}{x^2})]}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x^2}{x} + \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x}$  و لا بد

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x^2}) = 0$

(3)  $f'(x) = \frac{g'(x)}{x^2}$  أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$   $g'(x) = 2x$



$f$  نقيض الاستمرارية على  $]-\infty, 0[$  و  $]-\infty, 0[$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot x - 1 \cdot \ln(x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \text{و } g(x) = 2x^2 - \ln(x^2+1)$$

بما استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ونسلكها

لدينا  $f'(x)$  له إشارة  $g(x)$  لأن  $x^2 > 0$   
 $x \in \mathbb{R}^* \cup ]0, +\infty[$  على

وبما أن  $f$  فردية إذن

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

$f$  متزايدة تمامًا على  $]-\infty, -\alpha]$  و  $[\alpha, +\infty[$   
 $f$  متناقصه تمامًا على  $[-\alpha, \alpha]$



## جدول تغيرات $f$

$x$	$-\infty$	$-\alpha$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$0 +$	$+$	$0 -$
$f(x)$	$0$		$0$	$f(\alpha)$	$0$

نلاحظ أن  $f$  لها معادلات المماس ( $\Delta$ ) المنحني ( $C_f$ ) عند  
النقطة ذات الفاصلة  $0$

معادلة  $\Delta$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

أي:  $f'(0) = 1$  لأن  $y = 1(x - 0) + 0$

$$(\Delta): y = x$$

بما أن  $f$  و  $\Delta$  و  $C_f$  نلاحظ أن  $(\Delta)$  و  $C_f$  تتقاطع

في  $0$

بحسب الفرق

$$f(x) - y = \ln(x^2 + 1) - x$$

$$f(x) - y = \frac{1}{x} \ln(x^2 + 1) - x$$

$$= \frac{\ln(x^2 + 1) - x^2}{x}$$



$$K(x) = \ln(x^2+1) - x^x \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$x \in ]-\infty; +\infty[$$

نقطة من الشكل  $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2+1) - x^x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) \left[ \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{x^x}{x^2+1} \right]$$

$$= -\infty$$

$$K'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 2x$$

كيفية

$$K'(x) = 2x \left[ \frac{1}{x^2+1} - 1 \right]$$

$$= 2x \left( \frac{1 - x^2 - 1}{x^2+1} \right)$$

$$= -\frac{2x \times x^2}{x^2+1}$$

$-2x^3$  أو  $K'(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x^3$	-	0	+
$K(x)$	-	0	+
$K(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$K(0) = \ln(0^2+1) - 0^0$$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$



$$K(x) \leq 0$$

وذلك

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\ln(x^2+1) - x^2$	-	0	-
$x$	-	0	+
$f(x) = \frac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$	+	0	-
وضع $(C_f)$ بالأسفل ( $\Delta$ )			
فوق $(C_f)$ ( $\Delta$ )			
تحت $(C_f)$ ( $\Delta$ )			

التقسيم البياني:

بما أن المماس ( $\Delta$ ) يخترق المنحنى ( $C_f$ ) لأن لما

$x \in ]-\infty, 0[$  لدينا ( $C_f$ ) يقع فوق ( $\Delta$ ) ولما  $x \in ]0, +\infty[$

لدينا ( $C_f$ ) يقع تحت ( $\Delta$ )

إذن النقطة  $(0,0)$  نقطة انعطاف للمنحنى ( $C_f$ )

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{ب) بيّن أن}$$

ثم استنتج حصرًا لـ  $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x^2+1) \quad \text{لدينا}$$



$$\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1) = 0 \quad \text{حيث } f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = \ln(x^2+1) \quad \text{حيث } f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \text{وهذه}$$

استنتاج حصر  $f(x)$  لدينا

$$\frac{7}{4} < x^2 < 4$$

$$\left( \text{بعد تربيع كل طرف} \right) \frac{49}{16} < x^2 < 4$$

$$\left( \text{بعد إضافة 1 لكل طرف} \right) \frac{65}{16} < x^2+1 < \frac{16}{65}$$

ولدينا

$$\frac{7}{2} < 2x < 4$$

بعد الضرب طرفاً لطرف نجد

$$\frac{7}{2} \times \frac{1}{5} < \frac{2x}{x^2+1} < 4 \times \frac{16}{65}$$

$$\frac{7}{10} < f(x) < \frac{64}{65} \quad \text{وهذه}$$

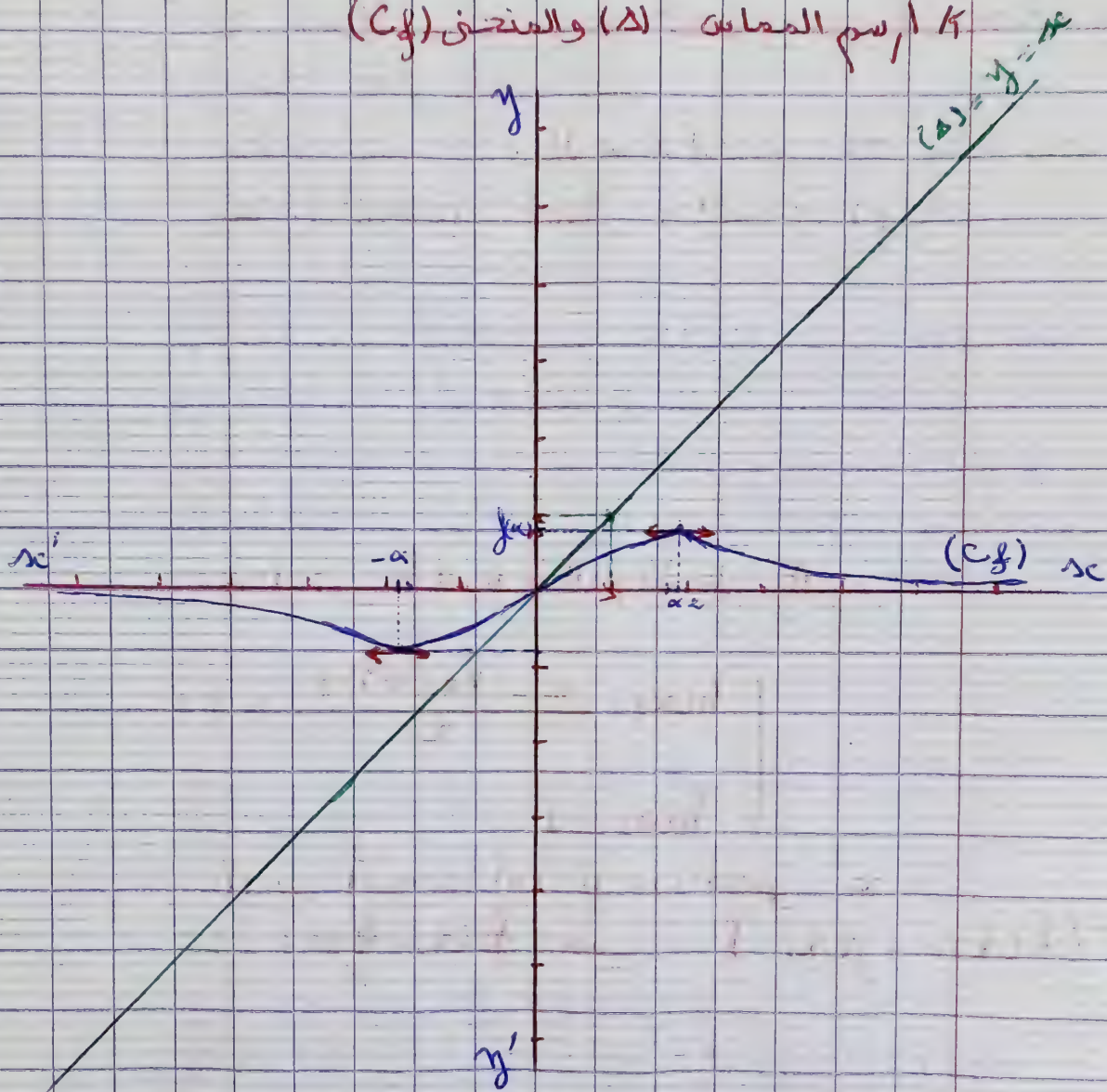
$$a < b < c$$

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$



ك، رسم المماس ( $\Delta$ ) والمماس ( $C_f$ )





٦ (Δm) مستقيم من المستوى معادلتها  $y = mx$   
 حيث  $m$  وسيط حقيقي  
 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد نقط  
 تقاطع المستقيم (Δm) والمنحنى  $(C_f)$

١ إذا كان  $m < 0$  توجد نقطة تقاطع وحيدة المبدأ  
 ٢ إذا كان  $0 < m < 1$  توجد 3 نقاط تقاطع  
 ٣ إذا كان  $m = 1$  لدينا المبدأ ٥ نقطة تماس  
 ٤ إذا كان  $m > 1$  لدينا نقطة تقاطع وحيدة المبدأ  
 ٥ لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x - \ln(x^2 + 1)}{x}, & x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

(١) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  
 $h(x) - k(x) = 1$  حيث :  $(k(x) = -f(x))$

لدينا من أجل  $x \neq 0$  :

$$\begin{aligned} h(x) - k(x) &= \frac{x - \ln(x^2 + 1)}{x} - \left[ -\frac{1}{x} \ln(x^2 + 1) \right] \\ &= \frac{x - \ln(x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1)}{x} \\ &= \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$



من أجل  $x=0$

$$\begin{aligned} h(0) - k(0) &= 1 - (-f(0)) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ب) استنتج طريقة لرسم المنحنى  $(C_h)$  انطلاقاً من  $(C_f)$

لدينا  $h(x) = k(x) + 1$

بما أن  $k(x) = -f(x)$

إذن  $(C_h)$  هو نظير  $(C_f)$  بالنسبة لـ  $(x, x')$

وحدة  $(C_h)$  هو صورة  $(C_k)$  بالتحريك  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

التصريح (147)

«  $z$  عدد مركب بحيث  $\operatorname{Re}(z) > 1$  »

بين أن:  $\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{2}$

من أجل  $z \neq 0$  لدينا

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right|^2 < \frac{1}{4} \quad \text{يكافئ} \quad \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right| < \frac{1}{2}$$

(لأن الطرفين موجبات)

كافئ  $\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right|^2 - \frac{1}{4} < 0$

لدينا

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right|^2 - \frac{1}{4} = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4}$$

$$= \left( \frac{z-3}{z3} \right) \left( \frac{z-3}{z3} \right) - \frac{1}{4}$$



$$= \left( \frac{2-\bar{z}}{2\bar{z}} \right) \left( \frac{2-\bar{z}}{2\bar{z}} \right) - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4 - 2\bar{z} - 2\bar{z} + \bar{z}\bar{z}}{4\bar{z} \times \bar{z}} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{4 - 2\bar{z} - 2\bar{z} + \bar{z}\bar{z} - \bar{z}\bar{z}}{4|\bar{z}|^2}$$

$$= \frac{4 - 2(\bar{z} + \bar{z})}{4|\bar{z}|^2}$$

$$\bar{z} + z = 2\cos\theta; \quad = \frac{4 - 2 \times 2\cos\theta}{4|\bar{z}|^2}$$

$$= \frac{4 - 4\cos\theta}{4|\bar{z}|^2}$$

$$= \frac{1 - \cos\theta}{|\bar{z}|^2} < 0$$

$$\left( \begin{array}{l} \operatorname{Re}(z) > 1 \\ \cos\theta > 1 \\ 0 > 1 - \cos\theta \end{array} \right)$$

مستحيل

$$\left| \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{2} \right|^2 - \frac{1}{4} < 0$$

أي

$$\left| \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$$



$$\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2-3}{2 \cdot 3} \right|$$

ط (2) من أجل  $z \neq 0$  لدينا:

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|2-3|}{2|3|}$$

أي:

$$\frac{|2-3|}{2|3|} < \frac{1}{2} \quad \text{تكافئ} \quad \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{ومنه}$$

تكافئ  $|2-3| < |3|$  بعد ضرب الطرفين

في  $|3|$

لأن  $|3| > 0$

$z = x + iy$  لأن بوضع  $\bar{z}$  نجد

$$\sqrt{(2-x)^2 + (-y)^2} < \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{تكافئ}$$

$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy)$$

$$= (x - x) - iy$$

بعد تربيع الطرفين

الموجبة

$$(2-x)^2 + y^2 < x^2 + y^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$4 - 4x + x^2 + y^2 < x^2 + y^2 \quad \text{تكافئ}$$

$$4 < 4x \quad \text{تكافئ}$$

$$1 < x \quad \text{تكافئ}$$

صحيحة

ومنه

$$\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}$$



التمرين 148

عددان مركبان بحيث  $z_1$  و  $z_2$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{3} \text{ و } |z_1| = |z_2| = 1$$

$$|z_1 - z_2|$$

احسب

لدينا:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1 \times \overline{z_1} + z_1 \times \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \times \overline{z_2}$$

$$(1) \quad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1 \times \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$$

ولدينا

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$$

$$|z_1 - z_2|^2 = z_1 \times \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2$$



وبالجمع

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

ولمعرفة  $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$  لأن  $(\sqrt{3})^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(1 + 1)$

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = 1^2 = 1$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 1$$

أي

ومنه  $|z_1 - z_2| = 1$

المقرر 149

$z_1$  و  $z_2$  عددين مركبان

يُبين أنه إذا كان  $|z_1| = |z_2| = 1$  و  $z_1 \times z_2 \neq -1$  فإن:

$$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

نضع  $Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$

$z_1 \times z_2 \neq -1$  أي  $1 + z_1 z_2 \neq 0$   $Z$  معرف لأن  $Z$  حقيقي معناه  $\bar{Z} = Z$  أو  $\bar{Z} - Z = 0$



$$\bar{z} - z = \left( \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} \right) - \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \quad \text{و.ج}$$

$$= \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} - \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

$$= \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(1 + z_1 z_2) - (z_1 + z_2)(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)}{(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)(1 + z_1 z_2)}$$

$$\bar{z} - z = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_1 z_1 z_2 + \bar{z}_2 + z_1 z_2 \bar{z}_2 - z_1 - z_1 \bar{z}_1 \bar{z}_2 - z_2 - z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_2}{(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)(1 + z_1 z_2)}$$

$$\bar{z} - z = \frac{\bar{z}_1 + |\bar{z}_1|^2 z_2 + \bar{z}_2 + z_1 |z_2|^2 - z_1 - |z_1|^2 \bar{z}_2 - z_2 - \bar{z}_1 |z_2|^2}{(1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2)(1 + z_1 z_2)}$$

$$\bar{z} - z = 0 \quad \text{و.ج}$$

تحقیق  $z$  و  $\bar{z}$



مربع عدد مركب يساوي مربع الجزء الحقيقي ناقص مربع الجزء التخيلي

$$\text{Arg}(z_1 \times z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + 2k\pi \quad /1$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$z_2 \neq 0 \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) + 2k\pi \quad /2$$

$$z \neq 0 \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi \quad /3$$

$$\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg}(z) + 2k\pi \quad /4$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z) + 2k\pi \quad /5$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad /6$$

$n \in \mathbb{Z}$

دستور موافق

MOIVRE

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$



السؤال ١٢٥  
أثبت أن  $Z = (-1 + i\sqrt{3})^{3n}$  حقيقي  
 $n \in \mathbb{N}$  مح

نكتب  $-1 + i\sqrt{3}$  على الشكل المثلثي (أو الأسّي)  
لدينا

$$|-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

ومن ثم

$$\begin{aligned} -1 + i\sqrt{3} &= 2 \left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 2 \left[ \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

ومن ثم

$$Z = \left[ 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^{3n}$$

$$Z = 2^{3n} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{3n}$$

حسب دستور موافق  $Z = 2^{3n} \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3} \times 3n\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} \times 3n\right) \right]$

$$\begin{aligned} Z &= 2^{3n} (\cos(2n\pi) + i \sin 2n\pi) \\ Z &= 2^{3n} (1 + i \times 0) \\ Z &= 2^{3n} \end{aligned}$$

$\cos(2k\pi) = 1$  لأن  
 $\sin(2k\pi) = 0$

ومن ثم  $Z$  حقيقي



المقرر 151 (Bac . S.F 2002)

انطلاقاً من التعريف  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

وبمنه الخاصية  $e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن  $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$  وأن  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

حيث  $\theta, \theta_1, \theta_2$  أعداد حقيقية

ط / لدينا:

$$e^{i\theta} \times e^{-i\theta} = e^{i\theta + (-i\theta)}$$

$$= e^0$$

$$= 1$$

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

إذن

ط / لدينا:

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta}$$

$$= \frac{1(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)}$$

$$= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1}$$

$$= \cos \theta - i \sin \theta$$

$$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

$$= e^{-i\theta}$$



إثبات أن

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

لدينا

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} &= e^{i\theta_1} \times \frac{1}{e^{i\theta_2}} \\ &= e^{i\theta_1} \times e^{-i\theta_2} \\ &= e^{i\theta_1 - i\theta_2} \\ &= e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

التمرين 152

المضاد منسوب إلى معام متعامد ومتجانس  $(0, i, j)$   
 نعتبر المستوى  $(P)$  الذي معادله  $x + 2y - z + 7 = 0$   
 والنقطة  
 $A(2, 0, 1)$   
 $B(3, 2, 0)$   
 $C(-1, -2, 2)$

أ) بين أن معادلة  $(ABC)$  هي  $x + 2z - 2 = 0$   
 ب) تحقق أن  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان ثم عين تمثيلا  
 وسطيًا للمستقيم  $(\Delta)$  تقاطع  $(P)$  و  $(ABC)$   
 ج) لتكن  $G$  مخرج الجملة  $\{(A, 1), (B, \alpha), (C, \beta)\}$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$   
 عدنان حقيقيان يحققان  $1 + \alpha + \beta \neq 0$   
 عين  $\alpha$  حتى تنتهي النقطة  $G$  إلى المستقيم  $(\Delta)$



1. لدينا

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ غير مرتبطين خطيا}$$

$$-\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{2}$$

لأن

أي أن  $A, B, C$  تشكل مستويًا واحدًا  $(ABC)$

ولدينا

$$A \in (ABC) \quad \text{أي} \quad y_A + 2z_A - 2 = 0 + 2(1) - 2 = 0$$

$$B \in (ABC) \quad \text{أي} \quad y_B + 2z_B - 2 = 2 + 2(0) - 2 = 0$$

$$C \in (ABC) \quad \text{أي} \quad y_C + 2z_C - 2 = 2 + 2(2) - 2 = 0$$

$$y + 2z - 2 = 0 \text{ هي معادلة } (ABC)$$

2. نتحقق أن  $(ABC) \perp (P)$

ليكن  $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  شعاعًا عموديًا على  $(ABC)$

$\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  شعاعًا عموديًا على  $(P)$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (0)(1) + (1)(2) + (2)(-1) = 0$$

إذن  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  متعامدان ومنه  $(ABC) \perp (P)$

نما أن  $(ABC) \perp (P)$  إذن  $(P)$  يقطع  $(ABC)$  وفق مستقيم (د) حيث

$$\begin{cases} x + 2y - z + 7 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

ومنه تمثيل وسيطي لـ (د) هو:

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad \text{لأن} \quad \begin{cases} x + 2(2 - 2t) - t + 7 = 0 \\ x = -11 + 5t \end{cases}$$



$G \in (\Delta)$  يعني  $\alpha$  يجب

دعا  $G$   $1 + \alpha + \beta \neq 0$   $G$   $1 + \alpha + \beta \neq 0$   $G$   $1 + \alpha + \beta \neq 0$

$$\begin{cases} x_G = \frac{2 + 3\alpha - \beta}{1 + \alpha + \beta} \\ y_G = \frac{2 + 2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta} \\ z_G = \frac{1 + 2\beta}{1 + \alpha + \beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} G \in (P) \\ G \in (ABC) \end{cases} \quad \text{يعني } G \in (\Delta)$$

$$\begin{cases} \frac{2 + 3\alpha - \beta}{1 + \alpha + \beta} + \frac{2(2\alpha - 2\beta)}{1 + \alpha + \beta} - \frac{1 + 2\beta}{1 + \alpha + \beta} + 7 = 0 \\ \frac{2\alpha - 2\beta}{1 + \alpha + \beta} + \frac{2(1 + 2\beta)}{1 + \alpha + \beta} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 3\alpha - \beta + 4\alpha - 4\beta - 1 - 2\beta + 7 + 7\alpha + 7\beta = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 2 + 4\beta - 2 - 2\alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = -\frac{4}{7} \text{ و } \begin{cases} 14\alpha = -8 \\ 0 = 0 \end{cases}$$



2/Δ

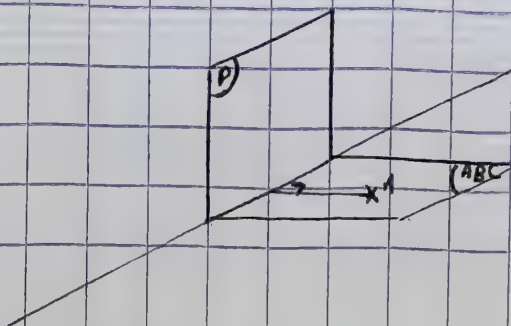
نقطة G ∈ (Δ)

$$\begin{cases} \frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta} = -11 + \frac{5(1+2\beta)}{1+\alpha+\beta} \\ \frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta} = 2 - 2\left(\frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}\right) \\ t = \frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+3\alpha-\beta = -11-11\alpha-11\beta+5+10\beta \\ 2\alpha-2\beta = 2+2\alpha+2\beta-2-4\beta \\ t = \frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14\alpha = -8 \\ 0 = 0 \\ t = \frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta} \end{cases}$$

أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)





لدينا  
 $(P) \perp (ABC) \text{ أي } d[A, (\Delta)] = d[A, (P)]$

$$= \frac{|x_A + 2y_A - 3z_A + 7|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|2 + 2(0) - 1 + 7|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{6}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

الضرب (123)

أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب  
 $z = (2\sqrt{3} + 2i)^5 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

فأكتب  $L = 2\sqrt{3} + 2i$

$$|L| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4$$

أي  $L = 4 \left( \frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{4}i \right)$

$$L = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$L = 4 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

على الشكل الأسّي



$$L^5 = (4 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}})^5 \quad \text{وبينه}$$

$$L^5 = 4^5 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{حسب دستور موافق}$$

$$z = 4^5 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

وبالتالي

$$z = 4^5 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6} - i\frac{\pi}{3}}$$

$$z = 4^5 \cdot e^{i\frac{4\pi}{6} - i\frac{2\pi}{6}}$$

$$z = 4^5 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

الحد المركب  $i$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$i^n = \begin{cases} 1; & n = 4k; & k \in \mathbb{N} \\ i; & n = 4k+1; \\ -1; & n = 4k+2; \\ -i; & n = 4k+3 \end{cases}$$

$$i \rightarrow M(0; 1)$$

$$iy = y e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad y > 0$$

$$iy = -y e^{-i\frac{\pi}{2}}; \quad y < 0$$

$$i^2 = -1$$

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$(1-i)^2 = -2i$$

$$\bar{i} = -i = \frac{1}{i}$$

$$|\bar{i}| = |-i| = |i| = 1$$

$$\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$



المقرر (١٢٤)

نختار العدد المركب  $z$

$$z = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

١) أحسب  $z^2$  ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب  $z^2$

٢) عين الطويلة وعمدة للعدد المركب  $z$

٣) استنتج أن

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

١) حساب  $z^2$   
لدينا

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

$$b > 0, a > 0$$

$$z^2 = \left( \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right)^2$$

$$z^2 = \left( \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \right)^2 + 2 \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \times \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} i + \left( i \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right)^2$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$x > 0$$

$$z^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2 \sqrt{\left( \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right) \left( \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right)} i - \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \sqrt{\frac{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}{2^2}} i - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z^2 = -\sqrt{3} + 2 \sqrt{\frac{1}{4}} i$$

$$z^2 = -\sqrt{3} + i$$



نحسب الطول وعندها  $z^2$

$$|z^2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$$

$$|z^2| = 2$$

$\theta$  عند  $z^2$  تحقق

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \quad \text{أي}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

إذا نحسب الطول وعندها  $z$

$$|z^2| = 2 \quad \text{أي} \quad |z| = \sqrt{2}$$

$$|z| > 0 \quad \text{أي} \quad |z| = \sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(z^2) = 2 \text{Arg}(z) \quad \text{أي}$$

$$2 \text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad \text{أي}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12} \quad \text{إذا كان } k=0$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12} + \pi \quad \text{إذا كان } k=1$$

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} > 0 \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} > 0$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{5\pi}{12} \quad \text{ومن ثم}$$



$$\cos = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}}$$

المنتج

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

المعروف (159)

عن  $(\Gamma)$  مجموعة النقاط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث

$$\text{Arg}(z+1+i) = \text{Arg}(z-ei) + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z+1+i) - \text{Arg}(z-ei) = 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z+1+i) - \text{Arg}(z-ei) = 2k\pi$$

$$\text{Arg}(z - (-1-i)) - \text{Arg}(z-ei) = 2k\pi$$

$$\text{Arg}(z - z_A) - \text{Arg}(z - z_B) = 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$A(-1, -1) \quad z_A = -1-i$$

$$B(0, i) \quad z_B = ei$$

$$B(0, i)$$

$$(\vec{i}, \vec{AM}) - (\vec{i}, \vec{BM}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{i}, \vec{AM}) + (\vec{BM}, \vec{i}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{BM}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{AM}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



$$(\vec{BM}, \vec{AM}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{MB}, \vec{MA}) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

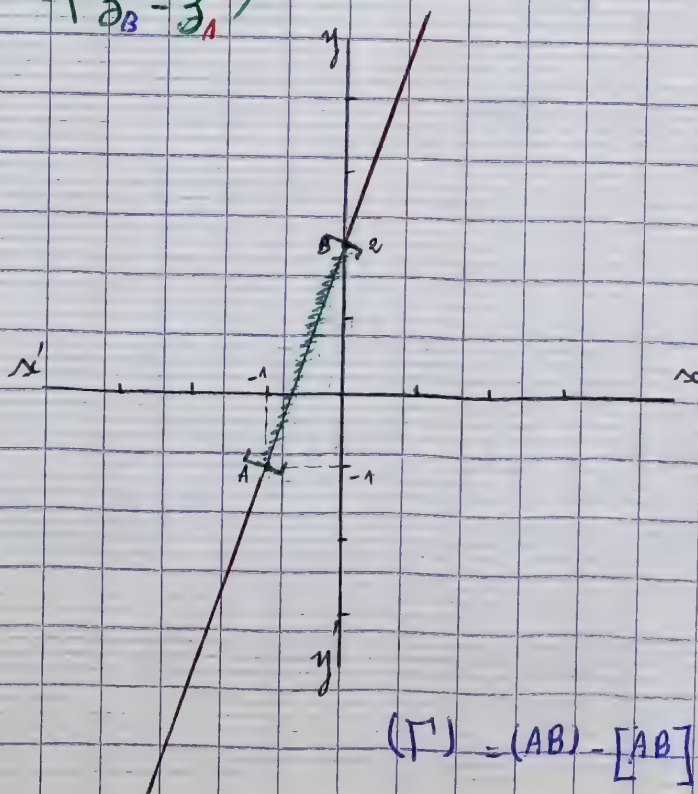
$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$$

$$\arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{AC})^B = \arg(z_c - z_A) - \arg(z_B - z_A) = (\vec{i}, \vec{AB})$$



$$(\Gamma) = (AB) - [AB] \text{ ang}$$

A(-i-j)  
B(0,0)



النقطة (176)

عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقاط  $M$  ذات الاصف  $z$  حيث

$$\text{Arg}(z+1+i) = \text{Arg}(z-2i) + \pi$$

من أجل  $z \neq -1-i$  و  $z \neq 2i$  لدينا

$$\text{Arg}(z+1+i) = \text{Arg}(z-2i) + \pi$$

$$\text{Arg}(z+1+i) - \text{Arg}(z-2i) = \pi \quad \text{نكتب}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z+1+i}{z-2i}\right) = \pi$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z - (-1-i)}{z-2i}\right) = \pi$$

$$A(-1, -1) \text{ أي } z_A = -1-i \quad \text{و} \quad \text{Arg}\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)$$

$$B(0, 2) \text{ أي } z_B = 2i$$

$$(\vec{BM}, \vec{AM}) = \pi$$

أي

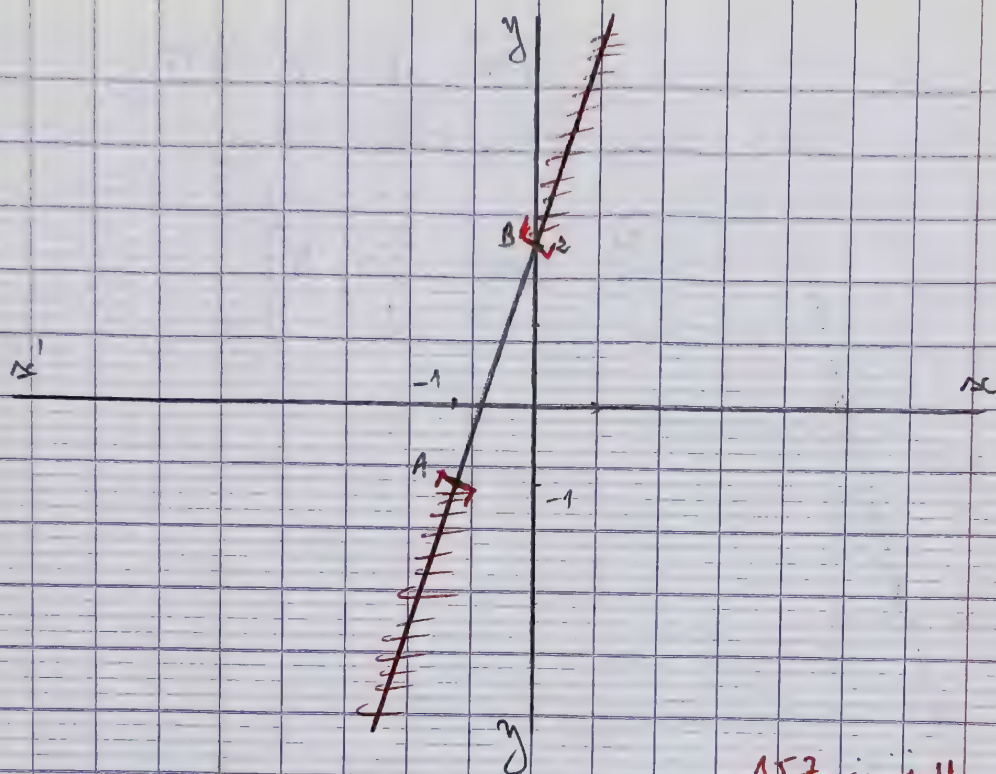
$$(\vec{MB}, \vec{MA}) = \pi$$

يعني  $\vec{MA}$  و  $\vec{MB}$  مرتبطين خطياً

في اتجاه معاكس

$$(\Gamma) = [AB] - \{A, B\} = ]AB[ \quad \text{وهو}$$





المسألة 157  
 إيجاد مجموعة القيم التي يأخذها  $\arg(z)$  حيث  
 $\arg(z+1+i) = \arg(z-2i) + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\arg\left(\frac{z - (-1-i)}{z - 2i}\right) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} z_A &= -1-i \\ z_B &= 2i \end{aligned}$$

حيث

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = k\pi$$

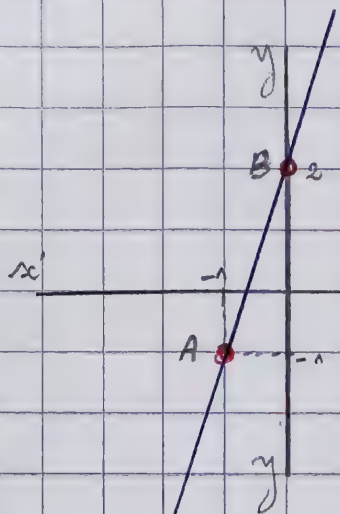
$$(\vec{BM}, \vec{AM}) = k\pi$$



$$(\vec{MB}, \vec{MA}) = k\pi$$

هنا يعني  $\vec{MA}$  و  $\vec{MB}$  مرتبكان خطيًا  
ومنه

$$(I) = (AB) - \{A, B\}$$



القرين ١٥٨

عن (I) مجموعة النقط M ذات اللاحقة  
z في كل حالة من الحالات الآتية

$$\text{R} \quad \text{مستقيم } \theta \quad z = 3 - 2i + 2e^{i\theta} \quad (1)$$

$$\text{R}^+ \quad \text{مستقيم } k \quad z = 1 + 3i + k \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (2)$$

$$\text{R}^+ \quad \text{مستقيم } k \quad \text{Arg}(z - 2 + i) = \text{Arg}(z - 3i) + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (3)$$

$$\theta \in \mathbb{R} \quad z = 3 - 2i + 2e^{i\theta} \quad \text{لنا}$$

$$\text{ACB: - أي } z_A = 3 - 2i \quad \text{نضع } z = z_A + 2e^{i\theta} \quad \text{نكتب}$$

$$z - z_A = 2e^{i\theta} \quad \text{أي}$$



$$\theta \in \mathbb{R} \text{ و } |z - z_A| = 2 \text{ ومنه}$$

$$\theta \in \mathbb{R} \text{ و } AM = 2$$

ومنه (M) دائرة مركزها  $A(3; -2)$  و نصف قطرها  $R = 2$

$$z = 3 - 2i + 2e^{i\theta} \quad (2P)$$

$$z = x + iy \text{ فنعوض } x + iy = 3 - 2i + 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$x + iy = 3 - 2i + 2\cos\theta + 2i\sin\theta$$

$$x + iy = (3 + 2\cos\theta) + i(-2 + 2\sin\theta)$$

وبالمطابقة نجد

$$\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = -2 + 2\sin\theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

نبحث علاقة بين  $x$  و  $y$  مستقلة عن  $\theta$   
لذا

$$\begin{cases} x - 3 = 2\cos\theta \\ y + 2 = 2\sin\theta \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} (x - 3)^2 = 4\cos^2\theta \\ (y + 2)^2 = 4\sin^2\theta \end{cases}$$

وبالجمع طرفاً لطرفاً نجد

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

ومنه (M) دائرة مركزها  $W(3; -2)$  و نصف قطرها  $R = 2$



ملاحظة

عبر (E) مجموعة النقط M ذات الابعاد 3 حيث :

$$z = 3 - e^{i\theta} + e^{i\theta}$$

$$\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

مع

حسب ما سبق M تنتمي للدائرة (C) التي مركزها  $(-2; 3)$  و

ونصف قطرها  $R = 2$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

بما أن

$$\cos \frac{\pi}{2} \leq \cos \theta \leq \cos 0$$

إذن

$$0 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$0 \leq 2 \cos \theta \leq 2$$

$$0 \leq x - 3 \leq 2$$

$$3 \leq x \leq 5$$

ولدينا

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \sin \theta \leq 1$$

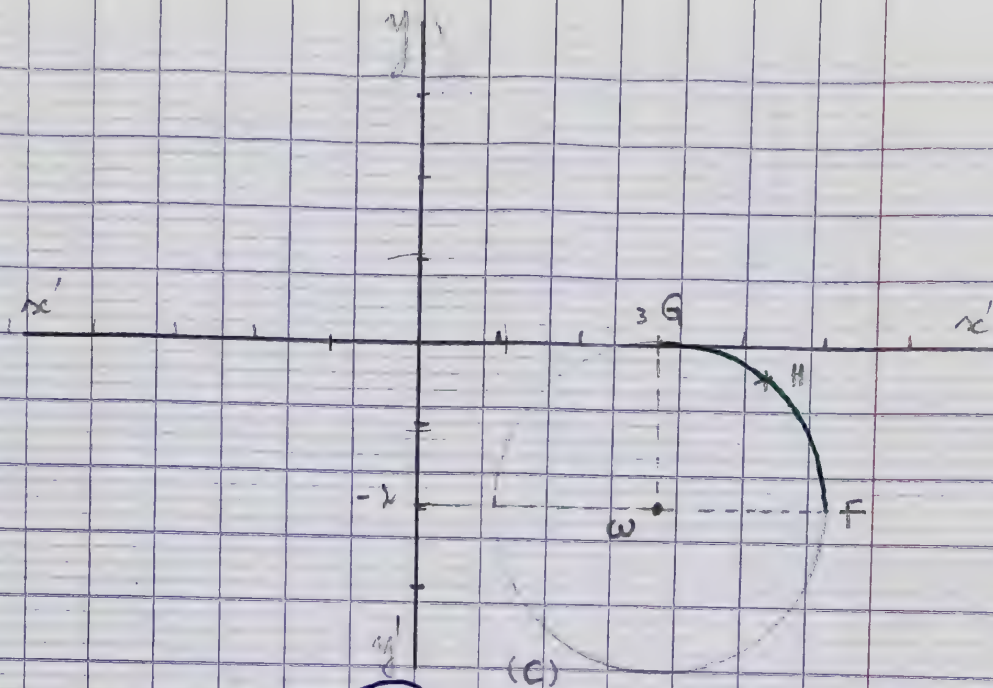
إذن

$$0 \leq 2 \sin \theta \leq 2$$

$$0 \leq y + 2 \leq 2$$

$$-2 \leq y \leq 0$$





$$(E) = \widehat{GHF}$$

ومنه

$$G(3; 0) \quad \text{حيث}$$

$$F(5; -2)$$

$$k > 0 \quad z = 1 + 3i + k e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad (2)$$

نكتب

$$z - (1 + 3i) = k e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_B = 1 + 3i \quad k > 0 \quad z - z_B = k e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{أي}$$

أو  $B(1; 3)$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

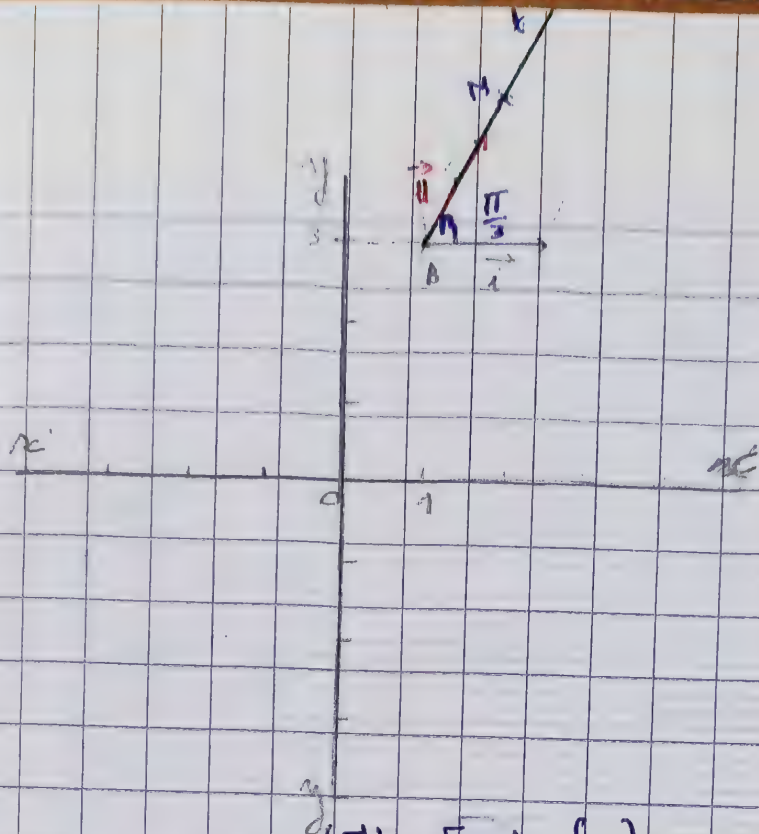
$$\vec{z} - \vec{u} = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{حيث} \quad \vec{BM} = k \vec{u} \quad k > 0$$

أي

هذا يعني أن:

$\vec{BM}$  و  $\vec{u}$  مرتبطان خطياً وفي نفس الاتجاه





ومنه  $(\Gamma) = [At] - \{B\}$  أي  $(\Gamma)$  من نصف مستقيم مفتوح مبدؤه B و شعاع توجيهه  $\vec{u}$

$$z = 1 + 3i + k e^{i\frac{\pi}{3}} \quad (2A)$$

نكتب:

$$z = x + iy \text{ فـ } x + iy = 1 + 3i + k e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$x + iy = 1 + 3i + k (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$x + iy = 1 + 3i + k \times \frac{1}{2} + k i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x + iy = (1 + \frac{1}{2}k) + i(3 + k \frac{\sqrt{3}}{2})$$

وبالتالي نقدر أن:

نمثل وسيطة نصف مستقيم مفتوح  $x = 1 + \frac{1}{2}k$   $k > 0$   
 مبدؤه B(1;3) و شعاع توجيهه  $y = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}k$

$$\vec{u} \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



(3) نكتب  $\Gamma$  حيث:

$$\text{Arg}(z - 2 + i) = \text{Arg}(z - 3i) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z - (2 - i)) - \text{Arg}(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi : \text{نكتب}$$

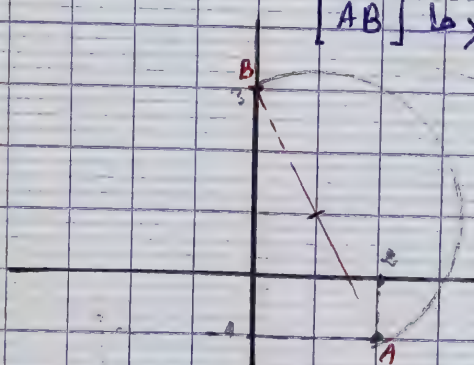
$A(2-1) \Rightarrow z_A = 2 - i$  و  $B(0;3) \Rightarrow z_B = 3i$

$$\text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{BM}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{MB}; \vec{MA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهذا  $(\Gamma)$  هي نصف دائرة قطرها  $[AB]$   
لأنها النقطتين  $A$  و  $B$



التمرين 129

المعادلة الآتية  $z^4 = 64$

حل في



$$z^4 = 64 \quad \text{لها 4 جذور}$$

$$(z^2)^2 = 8^2$$

$$\begin{cases} z^2 = 8 \\ z^2 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 = (2\sqrt{2})^2 \\ z^2 = 8i = (2i\sqrt{2})^2 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} z = 2\sqrt{2} \\ z = -2\sqrt{2} \\ z = 2i\sqrt{2} \\ z = -2i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$S = \{ 2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 2i\sqrt{2}; -2i\sqrt{2} \}$$

الاجابة



Transformation ponctuelle  
نقطة

$$T(M) = M'$$

↑  
M' سابقة بالتحويل T  
↑  
صورة M بالتحويل T

$T(M) = M$  عن نقطة صاعدة بالتحويل T

أو  $x' = x$  أو  $y' = y$

التمرين 160

( $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ) معلم متعامد ومتجانس ومباشر من المستوى  
ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من  
المستوى لاحتقائها في النقطة M' من المستوى لاحتقائها  
في حيث  $z' = (1-i)z + 1-2i$  العبارة المركبة  
للتحويل S

1. عين I النقطة الصاعدة بالتحويل S

لدينا  $S(M) = M'$  حيث  $z' = (1-i)z + 1-2i$

I نقطة صاعدة بالتحويل S يعني  $S(I) = I$

أو  $z'_I = z_I$



$$z_I = (1-i)z_I + 1-2i$$

$$z_I - (1-i)z_I = 1-2i$$

$$(1-1+i)z_I = 1-2i$$

$$iz_I = 1-2i$$

$$z_I = \frac{1-2i}{i}$$

$$z_I = \frac{(1-2i)(-i)}{i \times (-i)}$$

$$I(-2; -1) \text{ أي } z_I = -2-i \text{ و } z_I = \frac{-i-2}{1}$$

(2) على لاحظ أن A صورة النقط B ذات الإحداثيات

$5-2i$  بالتحريك S

$$z_A = (1-i)z_B + 1-2i \text{ حيث } S(B) = A \text{ لدينا أي:}$$

$$z_B = 5-2i \text{ أي } z_A = (1-i)(5-2i) + 1-2i$$

$$z_A = 5-2i-5i+2+1-2i$$

$$z_A = 4-9i \text{ ومنه}$$

(3) على لاحظ أن E صورة النقط F(-2; 6) بالتحريك S



لدينا :  $S(E) = F$  حيث  $z_F = (1-i)z_E + 1-2i$  أي :

$z_F = -2+6i$  لأن  $-2+6i = (1-i)z_E + 1-2i$   
 $-2+6i - 1+2i = (1-i)z_E$

$z_E = \frac{-3+8i}{1-i}$  أي  $-3+8i = (1-i)z_E$

$$z_E = \frac{(-3+8i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$z_E = \frac{-3-3i+8i-8}{(1)^2+(-1)^2}$$

وهذه  $z_E = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}i$

(4)  $H$  و  $K$  نقطتان من المستوى  
 و  $H'$  و  $K'$  صورتاهما بالاقوى  $S$   
 أثبت أن :  $K'H' = \sqrt{2} KH$

لدينا :  $S(H) = H'$  حيث :  $z_{H'} = (1-i)z_H + 1-2i$

$z_{K'} = (1-i)z_K + 1-2i$  حيث :  $S(K) = K'$

$$\begin{aligned} K'H' &= |z_{H'} - z_{K'}| \\ &= |(1-i)z_H + 1-2i - (1-i)z_K - 1+2i| \\ &= |(1-i)z_H - (1-i)z_K| \\ &= |(1-i)(z_H - z_K)| \end{aligned}$$



$$|z_H - z_K| = KH \text{ و } \begin{aligned} &= |1-i| \times |z_H - z_K| \\ &= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \times KH \\ &= \sqrt{2} KH \end{aligned}$$

(5) نكتب من المثلثات

و  $D, C, K, H$  و  $D', C', K', H'$  من المثلثات

$$\frac{K'H'}{C'D'} = \frac{KH}{CD} \text{ أثبت أن}$$

$$\text{لدينا: } \frac{K'H'}{C'D'} = \frac{\sqrt{2} KH}{\sqrt{2} CD} = \frac{KH}{CD} \text{ حسب السؤال 4}$$

$$z = x + iy \text{ موقع P6}$$

$$z' = x' + iy'$$

الكتب  $x'$  و  $y'$  بدلا من  $x$  و  $y$

$$z' = (1-i)z + 1-2i \text{ لدينا}$$

$$(x' + iy') = (1-i)(x + iy) + 1-2i$$

$$x' + iy' = x + iy - ix + y + 1 - 2i$$

$$x' + iy' = (x + y + 1) + i(-x + y - 2)$$

وبالمطابقة نجد

$$\text{انظمة المعادلات } \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases}$$

$$\text{للحصول على}$$

نحسب  $x$  و  $y$  بدلا من  $x'$  و  $y'$



$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

و بالجمع طرفاً لطرف نجد :

$$x' + y' = 2y - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad x' + y' + 1 = 2y$$

و بالتعويض في  $x' = x + y + 1$

$$x' = x + \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} + 1 \quad \text{نجد}$$

$$x' - \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} = x$$

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

التمرين (161)

( $T$ :  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) معالم متعامد ومتجانس للمستوي

ليكن التحويل النقطي  $T$  الذي يرفق بكل نقطة  $M(x, y)$  بالنقطة  $M'(x', y')$  حيث :

$$\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - x \end{cases} \quad \text{العبارة التحليلية}$$

للتحويل  $T$

1) عين إحداثيتي  $F$  صورة النقطة  $A(-1, 1)$  بالتحويل  $T$



$$\begin{cases} x' = 1 + y \\ y' = 1 - x \end{cases} \quad \text{لدينا } T(M) = M' \text{ حيث } M(x, y) \text{ و } M'(x', y') \text{ ومنه:}$$

$$\begin{cases} x_E = 1 + y_A \\ y_E = 1 - x_A \end{cases} \quad \text{حيث } T(A) = E$$

$$A(-1; 1) \xrightarrow{T} E(2; 2) \quad \begin{cases} x_E = 1 + 1 = 2 \\ y_E = 1 - (-1) = 2 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

(2) عن أحد النقطتين  $K$  سابقة للنقطة  $F(4; -2)$  بالتحويل  $T$

$$\begin{cases} x_F = 1 + y_K \\ y_F = 1 - x_K \end{cases} \quad \text{لدينا } T(K) = F \text{ أي}$$

$$\begin{cases} 4 = 1 + y_K \\ -2 = 1 - x_K \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} y_K = 3 \\ x_K = 3 \end{cases} \quad \text{أي}$$

ومنه  $K(3; 3)$

(3) عن أحد النقطتين  $K$  والنقطة الصاعدة بالتحويل  $T$



$T(w) = w$  يعني  $w$  نقطة صامدة بالتحويل  $T$  يعني

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{أي:} \\ \text{أي:} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 1 + y = x \\ 1 - x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 - x = x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2x \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = x \\ y = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

وهذه النقطة الصامدة بالتحويل  $T$  هي  $w(1, 0)$

(4) عين العبارة المرادفة للتحويل  $T$  (أو الشب  $z$  بدلالة  $z'$  حيث  $z'$  لا حقة  $M'$  و  $z$  لا حقة  $M$  لدينا

$$\begin{cases} i^2 = -1 \\ -i^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z' &= x' + iy' \\ z' &= 1 + y + i(1 - x) \\ z' &= 1 + y + i - ix \\ z' &= y - ix + 1 + i \\ z' &= iy - ix + 1 + i \\ z' &= -i(x + iy) + 1 + i \end{aligned}$$



(الخيار المركزي إلى التحويل T)

$$z' = -iz + 1 + i$$

(5) بيان T تقايس

$$T(M) = M'$$

$$MN = M'N'$$

T تقايس معناه

$$T(M) = M' \text{ حيث}$$

$$T(N) = N'$$

$$M'N' = MN \text{ T تقايس معناه}$$

$$T(M) = M' \text{ مع}$$

$$T(N) = N'$$

$$z_{M'} = -iz_M + 1 + i \text{ حيث } T(M) = M'$$

$$z_{N'} = -iz_N + 1 + i \text{ حيث } T(N) = N'$$

ومنه

$$M'N' = |z_{N'} - z_{M'}|$$

$$= |-iz_N + 1 + i + iz_M - 1 - i|$$

$$= |-iz_N + iz_M|$$

$$M'N' = |-i(z_N - z_M)|$$



$$M'N' = 1 - \alpha |z_N - z_M|$$

$$M'N' = 1 \times MN$$

$$M'N' = MN$$

و ايسو T

$$M'N'^2 = (\alpha_{N'} - \alpha_{M'})^2 + (y_{N'} - y_{M'})^2$$

$$N' \begin{cases} \alpha_{N'} = 1 + y_N \\ y_{N'} = 1 - \alpha_N \end{cases} \quad \begin{aligned} \bar{O}X &= [1 + y_N - (1 + y_M)]^2 + [(1 - \alpha_N) - (1 - \alpha_M)]^2 \\ &= (y_N - y_M)^2 + (\alpha_M - \alpha_N)^2 \end{aligned}$$

$$M' \begin{cases} \alpha_{M'} = 1 - y_M \\ y_{M'} = 1 - \alpha_M \end{cases} \quad = MN^2$$

$$M'N' = MN \quad \text{و ايسو T}$$



التمرين 162

عبر الصورة المركبة لإيجاد  $T_M$  الذي يتبعه

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

لدينا  $T_M(M) = M'$  حيث  $\vec{MM'} = \vec{u}$  ومنه

حيث  $z$  صورة  $M$

$$z' - z = \vec{u}$$

حيث  $z'$  صورة  $M'$

حيث  $\vec{u}$  صورة  $\vec{u}$

وبالتالي

$$z' = z - 2 + 5i$$

$$z' = -2 + 5i$$

عبر الصورة المركبة  $F$  صورة النقطة  $A$  ذات

الآخقة  $z = 6$  بالإنسحاب  $T_M$

لدينا  $T_M(A) = E$  حيث  $z_E = z_A - 2 + 5i$

$$z_E = 6 - 2 + 5i$$

أي

$$z_A = 6 - 2i$$

$$z_E = 4 + 3i$$

أي

عبر الصورة المركبة  $F$  صورة النقطة  $A(1; 6)$  بالإنسحاب

$T_M$



$$T_{\vec{u}}(F) = H$$

لدينا

$$z_H = z_F - 2 + 5i$$

$$z_H = 1 + 6i$$

$$1 + 6i = z_F - 2 + 7i$$

$$z_F = 3 + i$$

ومنه

$T_{\vec{u}}$

معنى العبارة التحليلية

$$z' = z - 2 + 7i$$

(ط 1)

$$x' + iy' = x + iy - 2 + 7i$$

$$x' + iy' = (x - 2) + i(y + 7)$$

وبالمطابقة نجد

معنى العبارة التحليلية

$T_{\vec{u}}$

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 7 \end{cases}$$

$$\vec{MM'} = \vec{u} \quad \text{يعني} \quad T_{\vec{u}}(M) = M'$$

(ط 2)

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{أي } \begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = 7 \end{cases}$$

$$\vec{MM'} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = 7 \end{cases}$$

معنى العبارة التحليلية

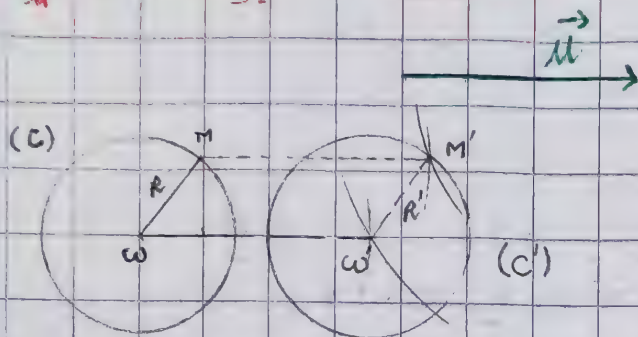
$T_{\vec{u}}$

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 7 \end{cases}$$

ومنه



(5) دائرة معادلتها  $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 9$   
 عين معادلة  $(C')$  صورة  $(C)$  بالانعكاس  $T_{\vec{u}}$



$$T_{\vec{u}}(C) = (C')$$

صورة  $(C)$  ذات المركز  $\omega$  ونصف القطر  $R$  بالانعكاس  
 شعاع  $\vec{u}$  هي دائرة  $(C')$  مركزها  $\omega'$  حيث  
 $T_{\vec{u}}(\omega) = \omega'$  ونصف قطرها  $R' = R$

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 5 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$$

بما أن:

$$(x' + 2 - 4)^2 + (y' - 5 + 1)^2 = 9 \text{ إذن } M \in (C)$$

ومنه معادلة  $(C')$  هي

$$(x' - 2)^2 + (y' - 4)^2 = 9$$

$$M' \in (C')$$

حيث  $(C')$  دائرة مركزها  $I(2; 4)$  ونصف  
 قطرها  $R' = 3$



25

بما أن (C) دائرة مركزها  $\omega(4, -1)$  ونصف قطرها  $R=3$  إذن (C') صورة (C) بـ  $T_{\vec{u}}$  هي دائرة مركزها  $\omega'$  حيث  $T_{\vec{u}}(\omega) = \omega'$  ونصف قطرها  $R'=R=3$  ولد بنا:

$$\begin{cases} x_{\omega'} = x_{\omega} - 2 = 4 - 2 = 2 \\ y_{\omega'} = y_{\omega} + 5 = -1 + 5 = 4 \end{cases} \quad \text{أي } T_{\vec{u}}(\omega) = \omega'$$

ومنه معادلة (C') هي

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3^2 = 9.$$

التجانس

Homothétie

H  
h

$$\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM} \quad \text{حيث } H(M) = M' \quad (k, k)$$

$$\begin{aligned} k &\neq 0 & k &\in \mathbb{R}^* - \{1\} \\ k &\neq 1 \end{aligned}$$

التعريف 163

عبر طبيعة التحويل T وعناصره المميزة على أن عبارته المركبة:

$$z' = -5z - 1 + 3i$$

$$z' = az + b \quad \text{عبارة مركبة من الشكل}$$

$$b = -1 + 3i, \quad a = -5 \quad \text{حيث:}$$



بما أن  $a = -5$  أي  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

اذن  $T$  تحالي

نسبته  $k = \bar{a} = -5$

مركزه  $\omega$  النقطة الصاعدة بحيث

$$\bar{z}_\omega = \frac{k}{1-a}$$

$$\bar{z}_\omega = \frac{-1+3i}{1-(-5)}$$

$$\bar{z}_\omega = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}i$$

أي  $(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$  في  $\omega$

المتوسط بين  $A$  و  $B$

من العبارة المركبة للتحالي  $h$  الذي مركزه

$A(-1, 5)$  ونسبته  $\frac{1}{2}$

نعلم أن العبارة المركبة للتحالي الذي مركزه  $\omega$

ونسبته  $k$  هي

$$\bar{z}' - \bar{z}_\omega = k(\bar{z} - \bar{z}_\omega)$$

ومنه العبارة المركبة لـ  $h$  هي

$$\bar{z}' - \bar{z}_A = \frac{1}{2}(\bar{z} - \bar{z}_A)$$

$$\bar{z}' = \frac{1}{2}\bar{z} + \bar{z}_A - \frac{1}{2}\bar{z}_A$$



$$z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z_A \quad \text{ومنه}$$

$$z_A = -1 + 5i \quad \text{لأن} \quad z' = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}(-1 + 5i)$$

المتجهين 165

A, B, C نقاط من المستوى

T الحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M'

بحيث

$$\vec{MM'} = 4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \quad (1)$$

$$\vec{MM'} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} \quad (2)$$

عبر طبيعة الحويل T في كل حالة من الحالات السابقة

مع ذكر عناصر المصفوفة

(1) لدينا

$$\vec{MM'} = 4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$$

نكتب

$$z' - z = 4(z_A - z) - (z_B - z) + 2(z_C - z)$$

$$z' = z + 4z_A - 4z - z_B + z + 2z_C - 2z$$

$$z' = -4z + 4z_A - z_B + 2z_C$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 4z_A - z_B + 2z_C \end{cases} \quad \text{من الشكل} \quad z' = az + b$$



بما أن  $k = a = -4$  نسأل إذا كانت  $G$  مركزاً للنقطة الواحدة حيث

$$3\omega = \frac{k}{1-a} = \frac{4\vec{z}_A - \vec{z}_B + 2\vec{z}_C}{5}$$

2د

بما أن  $4 - 1 + 2 = 5 \neq 0$  إذن  $G$

مركز المثلث  $\{(A; 4); (B; -1); (C; 2)\}$

موجود ووحيد ويحقق

$$4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} = (4 - 1 + 2)\vec{MG} \\ = 5\vec{MG}$$

$$\text{ومن هنا } \vec{MM}' = 4\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}$$

$$\vec{MM}' = 5\vec{MG}$$

"عدسة" مثال

$$\vec{MG} + \vec{GM}' = 5\vec{MG}$$

$$\vec{GM}' = 4\vec{MG}$$

$\vec{GM}' = -4\vec{GM}$  ومنه  $T$  تنتمي مركز  $G$

و نسأل  $k = -4$

$$(A) \vec{MM}' = 4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} \quad (e)$$

بما أن  $4 - 3 - 1 = 0$  إذن  $4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC}$

متجه ثابت (مستقل عن النقطة  $M$ )

إذن

$$\text{منس "عدسة" مثال} \quad 4\vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} = 4\vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) - (\vec{MA} + \vec{AC}) \\ = -3\vec{AB} - \vec{AC}$$



ومنه (\*) نكتب  $\vec{MM'} = -3\vec{AB} - \vec{AC}$   
 ومنه T انشاز شفاة  $-3\vec{AB} - \vec{AC}$

النقطة 166

المستوى المركب منسوب إلى معظم متعامد ومتجانس  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{0}$   
 A, B, C, D لواقعها على الترتيب:

$$\vec{z} = 1+i$$

$$\vec{z}_A = -5+2i$$

$$\vec{z}_B = 1+5i$$

$$\vec{z}_C = 11+7i$$

$$\vec{z}_D = -11+7i$$

عبر العبارة المركبة والعناصر المميزة للآلي  $h$

الذي يحول A إلى C و B إلى D

$$h(A) = C \quad \text{لدينا}$$

$$h(B) = D$$

العبارة المركبة  $h$  هي:  $z' = az + b$  حيث  $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\begin{cases} \vec{z}_C = a\vec{z}_A + b \\ \vec{z}_D = a\vec{z}_B + b \end{cases} \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} 1+5i = a(1+i) + b \\ -11+7i = a(-5+2i) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+5i = a(1+i) + b \\ -11+7i = a(-5+2i) + b \end{cases}$$

$$1+5i+11-7i = a(1+i+5-2i) + 2b$$

$$12-2i = a(6-i) + 2b$$



$$a = \frac{12 - 2i}{6 - i}$$

$$a = \frac{6(6 - i)}{(6 - i)}$$

$$a = 2 \quad \text{أي}$$

وبالتعويض في  $1 + 5i = a(1 + i) + b$

نجد  $1 + 5i = 2(1 + i) + b$

$$b = -1 + 3i$$

وهذه العبارة المركبة لـ  $h$  هي

$$z' = 2z - 1 + 3i$$

$$h = a = 2 \quad \text{أي تحويل مقياس 2}$$

$$z_w = \frac{b}{1 - a} \quad \text{ومركزه (نقطة ثابتة)}$$

$$z_w = \frac{-1 + 3i}{1 - 2} = 1 - 3i$$

$$w(1; -3)$$

التمرين 167

عن طبيعة التحويل  $T$  وعناصر المصفوفة

أنا عبارة المركبة  $z' = iz + 5 - 3i$

$z' = iz + 5 - 3i$  عبارة مركبة من الشكل

$$z' = az + b \quad \text{حيث}$$

$$a = i$$

$$b = 5 - 3i$$



لدينا نكتب  $|a|$

إذا  $T$  دوران  $|a| = |i| = 1$

زاوية  $\theta = \text{Arg}(a)$

$= \text{Arg}(i)$

$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$

مع مركزه  $\omega$  النقطة الصامدة حيث

$$z_{\omega} = \frac{b}{1-a}$$

$$z_{\omega} = \frac{5-3i}{1-i}$$

$$z_{\omega} = \frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$z_{\omega} = \frac{5+5i-3i+3}{(1)^2 + (-1)^2}$$

أي  $\omega(4;1)$   $z_{\omega} = 4+i$

ومن هنا  $T = R_{(\omega; \frac{\pi}{2})}$

المركبة 168

عنا العبارة المركبة للدوران  $r$  الذي مركزه  $\omega(1;2)$

زاوية  $\frac{\pi}{6}$

لدينا

$$z' - z_{\omega} = e^{i\frac{\pi}{6}} (z - z_{\omega})$$

$$z' = \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) (z - z_{\omega}) + z_{\omega}$$



$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - z\omega) + z\omega$$

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z\omega + z\omega$$

ومنه الحاصلية المركبة لـ  $r$  هي :

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)i$$

Bac G.F 2014 169 العربي

الجزء 3

الموضوع ①

5 نقاط

1) نحل في  $C$  المعادلة :

$$z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$$

لدينا

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-6\sqrt{2})^2 - 4(1)(36)$$

$$= 72 - 144$$

$$= -72$$

$$= 72i^2$$

$$= (6i\sqrt{2})^2$$

$$z_1 = \frac{6\sqrt{2} + 6i\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2} \text{ ومنه}$$

$$z_2 = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$$



(2)  $(0, u, v) \rightarrow \rightarrow$  مقام متعامد ومتجانس

$$z_A = 3\sqrt{2} (1+i)$$

$$z_B = \bar{z}_A$$

$$z_C = 6\sqrt{2}$$

$$z_D = \frac{z_C}{2}$$

(أ) كتابة  $z_A$  و  $z_B$  و  $z_D$  على الشكل الأسّي  
الديكارتي.

$$|z_A| = |3\sqrt{2}(1+i)|$$

$$= |3\sqrt{2}| |1+i|$$

$$= 3\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= 6$$

$$z_A = 3\sqrt{2} (1+i)$$

$$= 6 \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right]$$

$$= 6 e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$z_B = \bar{z}_A = 6 e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

ومنه

$$z_A (1+i) = 3\sqrt{2} (1+i)^2$$

$$c(1+i)^2 = 2i$$

$$\frac{z_A}{6} = 3\sqrt{2} \times 2i$$

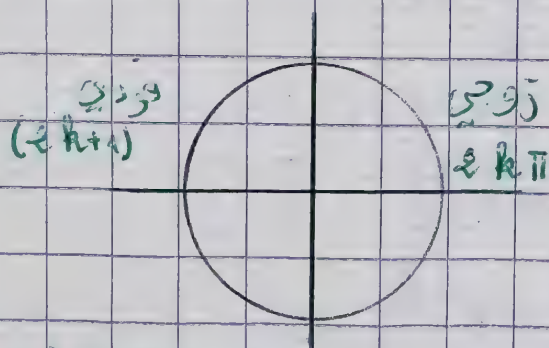
$$= 6\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{2}}$$



$$\left( \frac{(1+i)3_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} \quad \text{مسألة}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{(1+i)3_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} &= \left( \frac{6\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}} \right)^{2014} \\ &= \left( e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2014} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{دستور مواقع} &= e^{i\frac{\pi}{2} \times 2014} \\ &= e^{i1007\pi} \\ &= -1 \end{aligned}$$



$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

$$\sin(2k+1)\pi = 0$$

$$e^{i(2k+1)\pi} = -1$$

$$\cos 2k\pi = 1$$

$$\sin 2k\pi = 0$$

$$e^{i2k\pi} = 1$$

(ج) بیان آن 0, A, B, C - نتیجی الی نفس الی اثره  
اللی مرکزها 0



$$DO = |z_0 - z_D| = |0 - 3\sqrt{2}| = |-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} DA = |z_A - z_D| &= |3\sqrt{2}(1+i) - 3\sqrt{2}| \\ &= |3\sqrt{2}i| \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DB = |z_B - z_D| &= |3\sqrt{2}(1-i) - 3\sqrt{2}| \\ &= |-3\sqrt{2}i| \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DC = |z_C - z_D| &= |6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}| \\ &= |3\sqrt{2}| \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

إذن  $O, A, B, C$  تنتمي للدائرة التي مركزها  $D$  و نصف قطرها  $R = 3\sqrt{2}$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \quad \text{نسبة سالبة}$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{3\sqrt{2}(1-i) - 6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i) - 6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}[1-i-2]}{3\sqrt{2}[1+i-2]}$$

$$= \frac{-1-i}{-1+i}$$

$$= \frac{-1-i}{-1+i}$$

$$= \frac{i^2 - i}{-1+i} = \frac{i(i-1)}{-1+i} = i$$



إيجاد قوس  $(\vec{CA}, \vec{CB})$  بما أن

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$$

إذن

$$\text{Arg} \left( \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = \text{Arg}(i)$$

ومنه  $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$

طبع الزاوية  $\angle ACB$

بما أن بما أن

$$\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 1 \quad \text{إذن} \quad \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = |i| = 1$$

أي  $\frac{CB}{AC} = 1$

$CB = AC$

بما أن القطران  $[AB]$  و  $[CO]$  هما نفس المتجهات بما أن

$\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  و  $AC = BC$  و  $(z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_C + z_O}{2})$

إذن  $\triangle ACB$  مربع

في  $(R)$  الدوران مركزه  $O$  زاويته  $\frac{\pi}{2}$

أي العبارة المركبة للدوران  $R$

العبارة المركبة لـ  $R$  هي

$$z' - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_O)$$

أي  $z' = i(z - z_O) + z_O$

أي  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$



ب) نعيّن دالة  $C'$  صورة  $C$  بال دوران  $R$   
لدينا:  $R(C) = C'$

حيث  $z_{C'} = i z_C$   
 $z_C = 6\sqrt{2}$   $z_{C'} = 6\sqrt{2}i$

نتحقق أن  $A, C, C'$  على استقامة واحدة

$$\begin{aligned}\vec{z}_{AC'} &= \vec{z}_{C'} - \vec{z}_A = 6\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}(1+i) \\ &= -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \\ &= -(3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{z}_{AC} &= \vec{z}_C - \vec{z}_A = 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}(1+i) \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i\end{aligned}$$

إذن  $\vec{z}_{AC'} = -\vec{z}_{AC}$   
ومنه  $\vec{AC'} = -\vec{AC}$

وبالتالي  $A, C, C'$  على استقامة واحدة

ج) نعيّن دالة  $A'$  صورة  $A$  بال دوران  $R$

لدينا  $z_{A'} = i z_A$

$$\begin{aligned}z_{A'} &= i \times 3\sqrt{2}(1+i) \\ z_{A'} &= 3\sqrt{2}(-1+i)\end{aligned}$$

تحدد صورة المربع  $OACB$  بال دوران  $R$

لدينا  $R(O) = O$  لأن  $O$  النقطة الصاعدة

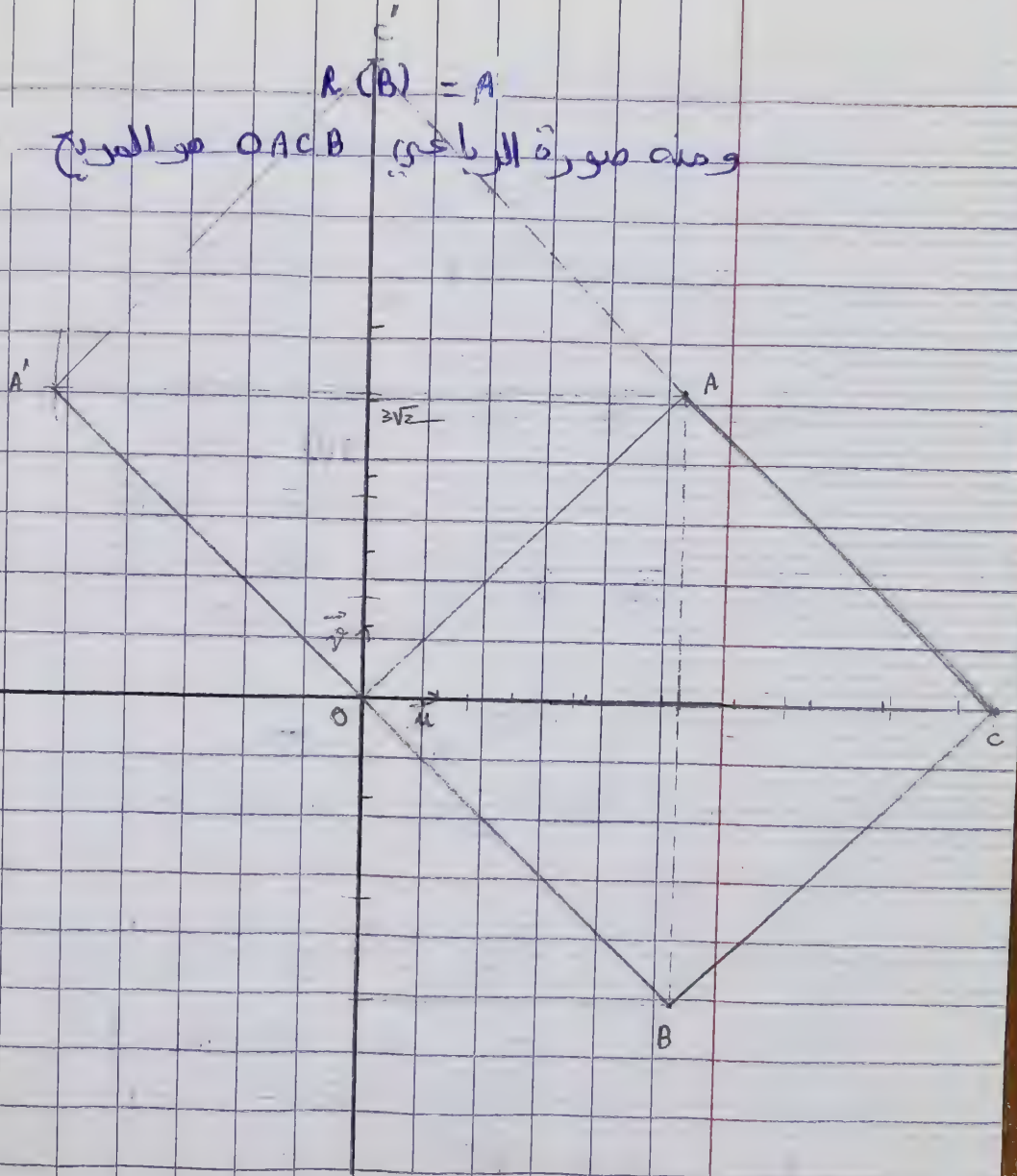
$$R(A) = A'$$

حيث  $z_{C'} = 6\sqrt{2}i$   $R(C) = C'$



$$R(B) = A$$

ومنه صورة الرباعي  $OACB$  هو المربع  $OA'CA$





similitude directe التماثل المباشر

$$S(M) = M'$$

$$(\omega, k, \theta)$$

$$k > 0 \quad \begin{cases} \omega M' = k \omega M \\ (\overline{\omega M}, \overline{\omega M'}) = e^{i 2 k \pi}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

نسبة  $k$  حيث  
ال تماثل  
المباشر

$$A'B = k AB$$

$$\vec{A'B} = k^2 \times \vec{A'BC}$$

$$\vec{V'} = k^3 \times \vec{V}$$

$$A' = S(A)$$

$$B' = S(B)$$

$$C' = S(C)$$

$$k \text{ تنبیه } \left. \begin{array}{l} \text{نسبة } k \\ \text{مركزة } \omega \end{array} \right\} z' - z_\omega = k (z - z_\omega) \quad \leftarrow \text{تساوي}$$

$$k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$$

$$z' - z_\omega = -(z - z_\omega) \quad \leftarrow \text{تناظر}$$

$$\theta = \text{Arg}(a) \text{ زاوية } a \left. \begin{array}{l} \text{نسبة } k \\ \text{مركزة } \omega \end{array} \right\} z' - z_\omega = e^{i\theta} (z - z_\omega) \quad \leftarrow \text{دوران}$$

$$k = |a| \text{ تنبیه } \left. \begin{array}{l} \text{نسبة } k \\ \text{زاوية } \theta \\ \text{مركزة } \omega \end{array} \right\} z' - z_\omega = k e^{i\theta} (z - z_\omega) \quad \leftarrow \text{تتشابه مباشر}$$

$$k > 0$$

المركز  $\omega$  هو النقطة الصامدة حيث

$$z_\omega = \frac{k}{1-a}$$



التمرين 175

عبر تطبيق التحويل  $T$  وحاصلها المميزه على  $z$   
عبارته المركبة هي:

$$z' = z - 3 + 2i \quad (1)$$

$$z' = -z + 5i \quad (2)$$

$$z' = 6z + 5 - 10i \quad (3)$$

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 2i \quad (4)$$

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z - i + 1 \quad (5)$$

1)  $z' = z - 3 + 2i$  عبارة مركبة من الشكل  $z' = az + b$   
حيث  $a = 1$

$$b = -3 + 2i$$

مأني  $a = 1$  إذن  $T$  انشعاب شعاعه  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

حيث  $z_{\vec{u}} = b = -3 + 2i$

2)  $z' = -z + 5i$  عبارة مركبة من الشكل  $z' = az + b$

حيث  $a = -1$

$$b = 5i$$

بما أن  $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$  إذن  $T$  تحاليل نسبية  $k = a = -1$

ومركزه  $w$  حيث  $z_w = \frac{b}{1-a}$

$$= \frac{5i}{1 - (-1)} = \frac{5i}{2}$$

$w(0; \frac{5}{2})$  : أ

$$T = H(w, -1)$$



$$z' = az + b \quad \text{معادلة مركبة من الشكل} \quad z' = 6z + 5 - 10i \quad (2)$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = 5 - 10i \end{cases} \quad \text{حيث}$$

$$\text{حيث } a \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ إذن } T \text{ تماثل}$$

$$h = a = 6 \quad \text{نسبة}$$

مركزة في حيث

$$z_w = \frac{b}{1-a}$$

$$z_w = \frac{5-10i}{1-6}$$

$$w(p, z) \quad \text{أي } z = -1 + 2i$$

$$z' = az + b \quad \text{معادلة مركبة من الشكل} \quad z' = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + 2i \quad (4)$$

$$a = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$b = 2i$$

نحسب  $|a|$

$$|a| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{لدينا}$$

إذن  $T$  دوران

$$\theta = \arg(a) \quad \text{او موجه}$$

$$\theta = \arg\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} + 2h\pi$$

$$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z}$$



مركزه  $\omega$  النقطة المأمدة حيث

$$z_{\omega} = \frac{b}{1-a}$$

$$z_{\omega} = \frac{2i}{1 - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)}$$

$$z_{\omega} = \frac{2i}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$$

$$\omega \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right) \quad \text{مع} \quad T = R \left( \omega, \frac{4\pi}{3} \right)$$

في  $z' = (1+i\sqrt{3})z - i+1$  عبارة مركزية في الشكل

$$z' = az + b$$

$$a = 1+i\sqrt{3}$$

$$b = -i+1$$

مع

حساب  $|a|$

$$a \neq 1 \text{ و } |a| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

لدينا  $k = |a| = 2$  إذن اختياره مباشر نسبة

$$\theta = \text{Arg}(1+i\sqrt{3})$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

مركزه  $\omega$  حيث

$$z_{\omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{-i+1}{1-(1+i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-i+1}{-i\sqrt{3}}$$



$$\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \bar{z}\omega = \frac{(-i+1)(i\sqrt{3})}{(-i\sqrt{3})(i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$T = S_{(\omega, e; \frac{\pi}{3})} \quad \text{ومنه}$$

ملاحظة

$$H_{(\omega, -1)} = S_{\omega} = R_{(\omega, \pi)} = S_{(\omega, 1)}$$



Bac S.E 2014

(171) المغربي

الموضوع

المغربي

4 نقاط

(1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

$$\begin{cases} z-i=0 \\ z^2-2z+5=0 \end{cases} \quad \text{المعادلة تكافئ}$$

$$\begin{cases} z=i \\ z^2-2z+5=0 \end{cases} \quad (1b)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(5)$$

$$\Delta = 4 - 20$$

$$\Delta = -16$$

$$\Delta = 16i^2 = (4i)^2$$

$$z_1 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$z_2 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$S = \{i, 1+2i, 1-2i\} \quad \text{ومن}$$



$$z^2 - 2z + 5 = 0 \quad (2)$$

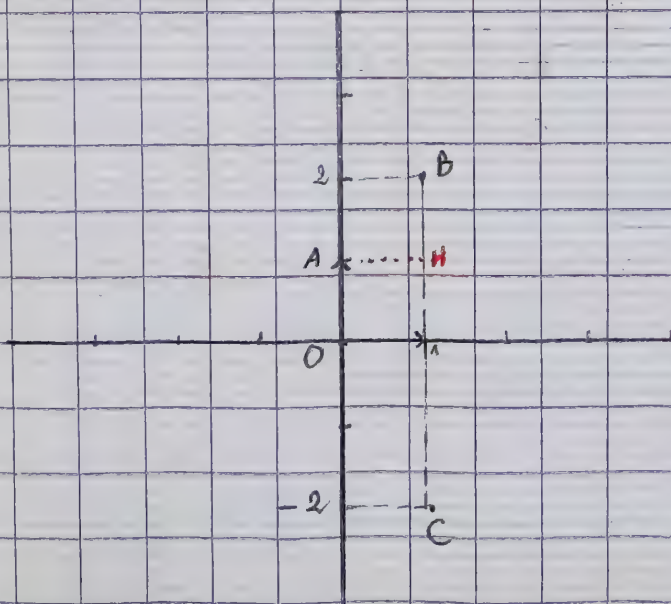
$$z^2 - 2z + 1 + 4 = 0$$

$$(z-1)^2 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$$

$$\begin{cases} z-1 = 2i \\ z-1 = -2i \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1+2i \\ z = 1-2i \end{cases}$$

نقطة  $A$  هي  $1$



(ب) إيجاد  $z$  حيث  $||\vec{MA}|| = ||\vec{MB}|| = ||\vec{MC}||$  (نقطة  $H$ )

$$H(1, 1)$$

$$z_H = 1 + i$$

$$\begin{cases} x_H = x_A = 1 \\ y_H = y_B = 1 \end{cases}$$



(e) بمثل أن H المصفوفة القوي لـ A على (BC) إذا  $\{HE(BC) \mid \vec{AH} \perp \vec{BC}\}$

بمثل أن HE(BC) إذا  $\alpha_H = 1$  وبمثل أن  $\vec{AH} \perp \vec{BC}$  إذا  $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{AH} \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha_H-1 \end{pmatrix} \text{ إذا } 0 \times 1 + (-4)(\alpha_H-1) = 0$$

$$\alpha_H = 1 \text{ إذا } \vec{AH}$$

$$\vec{AH} = 1 + i \text{ إذا } H(1,1) \text{ وبمثل أن}$$

ABC مساحة مثلث

لدينا

$$A_{ABC} = S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} \text{ إذا}$$

$$AH = |\vec{z}_H - \vec{z}_A| \text{ إذا } = \frac{1 \times 4}{2} \text{ إذا}$$

$$= |1+i-1|$$

$$= |1|$$

$$= 1$$

$$A_{ABC} = S_{ABC} = 2 \text{ cm}^2 \text{ وبمثل أن}$$

$$BC = |\vec{z}_C - \vec{z}_B|$$

$$= |1-2i-1-2i|$$

$$= |-4i|$$

$$= 4$$



3) أ) نعين الكتابة المركبة لـ  $S$  [مركزة  $A$   
نسبة  $\frac{1}{2}$   
زاوية  $\frac{\pi}{2}$ ]

نعلم أن

$$z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$$

ومنه الكتابة المركبة لـ  $S$  هي

$$z' - z_A = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A)$$

$$z' = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) (z - z_A) + z_A$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \checkmark$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$z' = \frac{1}{2} i (z - i) + i$$

$$z' = \frac{1}{2} i z + \frac{1}{2} + i$$

ب) تبين أن مساحة صورة  $ABC$  بالتمثيل  $S$  هي  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  لدينا

$$A_{A'B'C'} = k^2 A_{ABC}$$

$$A_{A'B'C'} = \left( \frac{1}{2} \right)^2 \times 2 \text{ cm}^2$$

ومنه

$$A_{ABC} = 2 \text{ cm}^2 \quad \checkmark$$

$$A_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2$$



(4) نكتب  $M(z)$  مجموعة النقاط  $\Delta$  حيث  $|z| = |iz + 1 + 2i|$

1b

$$\begin{aligned} |z| &= |iz + 1 + 2i| \\ |z| &= |i(z + \frac{1}{i} + 2)| \quad \text{نكتب} \\ |z| &= |i| |z - i + 2| \\ |z| &= |z - i + 2| \quad \text{أو} \\ |z| &= |z - (-2 + i)| \end{aligned}$$

$$z_E = -2 + i \quad \text{حيث} \quad |z| = |z - z_E| \quad \text{أو}$$

$$OM = EM$$

ومنه  $\Delta$  هو محور القطعة  $[OE]$

2b

$$\begin{aligned} |z| &= |iz + 1 + 2i| \\ z = x + iy \quad \text{نضع} \quad |x + iy| &= |i(x + iy) + 1 + 2i| \quad \text{نكتب} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x + iy| &= |ix - y + 1 + 2i| \\ |x + iy| &= |(-y + 1) + i(x + 2)| \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-y + 1)^2 + (x + 2)^2}$$

A  
ABC



مع تزيح المرفوع  $x^2 + y^2 = (-y+1) + (x+2)^2$

$$x^2 + y^2 = y^2 - 2y + 1 + x^2 + 4x + 4$$

$$4x - 2y + 5 = 0$$

وهذا (Δ) مستقيم معادله

$$4x - 2y + 5 = 0$$

BAC S.E 2013

التحريك 172

① الموضوع

③ التحريك

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة (I)

$$z^2 - (4 \cos \alpha)z + 4 = 0 \quad (I)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (4 \cos \alpha)^2 - 4(1)(4)$$

$$= 16 \cos^2 \alpha - 16$$

$$= 16(\cos^2 \alpha - 1)$$

$$= 16(-\sin^2 \alpha)$$

$$= -16i^2 \sin^2 \alpha$$

$$= (4i \sin \alpha)^2 \text{ ومنه}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad \text{في } \mathbb{C}$$

$$\cos^2 \alpha - 1 = -\sin^2 \alpha$$



$$\begin{aligned} \vec{z} &= r e^{i\theta} \\ \vec{z} &= r e^{-i\theta} \end{aligned}$$

$$\vec{z}_1 = \frac{4 \cos \alpha + 4i \sin \alpha}{2}$$

$$= 2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha$$

$$\vec{z}_2 = 2 \cos \alpha - 2i \sin \alpha$$

$$\left( \frac{\vec{z}_1}{\vec{z}_2} \right)^{2013} = 1 \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{مقدار } \alpha \text{ را تعیین کن}$$

$$\frac{\vec{z}_1}{\vec{z}_2} = \frac{2(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2(\cos \alpha - i \sin \alpha)}$$

$$= \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos \alpha(\alpha - (-\alpha)) + i \sin(\alpha - (-\alpha))}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$$

$$= \frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{و } \alpha = \frac{2\pi}{3} + i \frac{2\pi}{3}$$

$$\left( \frac{\vec{z}_1}{\vec{z}_2} \right)^{2013} = \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{2013}$$

$$\begin{aligned} \text{مقدار } \alpha \text{ را تعیین کن} &= \cos \left( \frac{2\pi}{3} \times 2013 \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \times 2013 \right) \\ &= \cos(2 \times 671 \pi) + i \sin(2 \times 671 \pi) \\ &= 1 + i \times 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} &= \left(\frac{2e^{i\alpha}}{2e^{i\alpha}}\right)^{2013} \\
 &= (e^{i\alpha})^{2013} \\
 &= e^{i\alpha \times 2013} \\
 &= e^{i4026} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

متتاليات حسابية  
suites arithmétiques  
ou progressions //

متتالية حسابية  
progression arithmétique

متتالية حسابية  
progression arithmétique

$$u_{n+1} = u_n + r$$

علاقة بين حدتي

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

علاقة الحد العام

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$



$(u_n)$  متتالية متقاربة

معناه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$n \rightarrow +\infty$

$l \in \mathbb{R}$  حيث

خاصية 3 حدود متتالية  
مؤام حساسية

$a, b, c$  حدود متتالية  
مؤام حساسية

يعني

$$a + c = b + b$$

$b$  الوسط الحسابي

مجموع حدود متتالية

$$S = \frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \times \text{عدد الحدود}$$

عدد حدود المتتالية

$$u_a, u_{a+1}, u_{a+2}, \dots, u_b$$

هو

$$+ 1 \text{ دليل العدد الأول} - \text{دليل العدد الأخير}$$

$$b - a + 1$$



المعروف 173

لنكن الأعداد  $V_1, V_2, V_3, V_4$  حدود متتابعة  
من متتالية حسابية حيث  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  حيث

$$\begin{cases} V_1 = 3 \\ V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 12 \end{cases}$$

(1) احسب أساس المتتالية

(2) احسب الحد العاشر

(3) أكتب عبارة الحد العام

(4) احسب المجموع  $S_n$  حيث  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

(1) حساب الأساس  $r$

لدينا  $V_1 = 3$

$$V_2 = V_1 + r = 3 + r$$

$$V_3 = V_1 + (3-1)r = V_1 + 2r = 3 + 2r$$

$$V_4 = V_1 + (4-1)r = V_1 + 3r = 3 + 3r$$

وهذه  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 18$  يكتب

$$3 + 3 + r + 3 + 2r + 3 + 3r = 18$$

$$6r = 18 - 12$$

$$6r = 6$$

وهذه  $r = 1$

(2) حساب الحد العاشر

بما أن  $V_1$  هو الحد الأول



اذن الحد العاشر هو  $V_{10}$

$$V_{10} = V_1 + (10-1)r$$

$$V_{10} = 3 + 9(-5)$$

$$V_{10} = -42$$

(3) عبارة الحد العام  
لدينا

$$V_n = V_1 + (n-1)r$$

$$V_n = 3 + (n-1)(-5)$$

$$V_n = -5n + 8$$

$S_n$  عدد حدود  $n=90$

(4) لدينا

$$S_n = \frac{n(V_1 + V_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(3 - 5n + 8)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(-5n + 11)}{2}$$

تابع للصحيق 172

$$z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

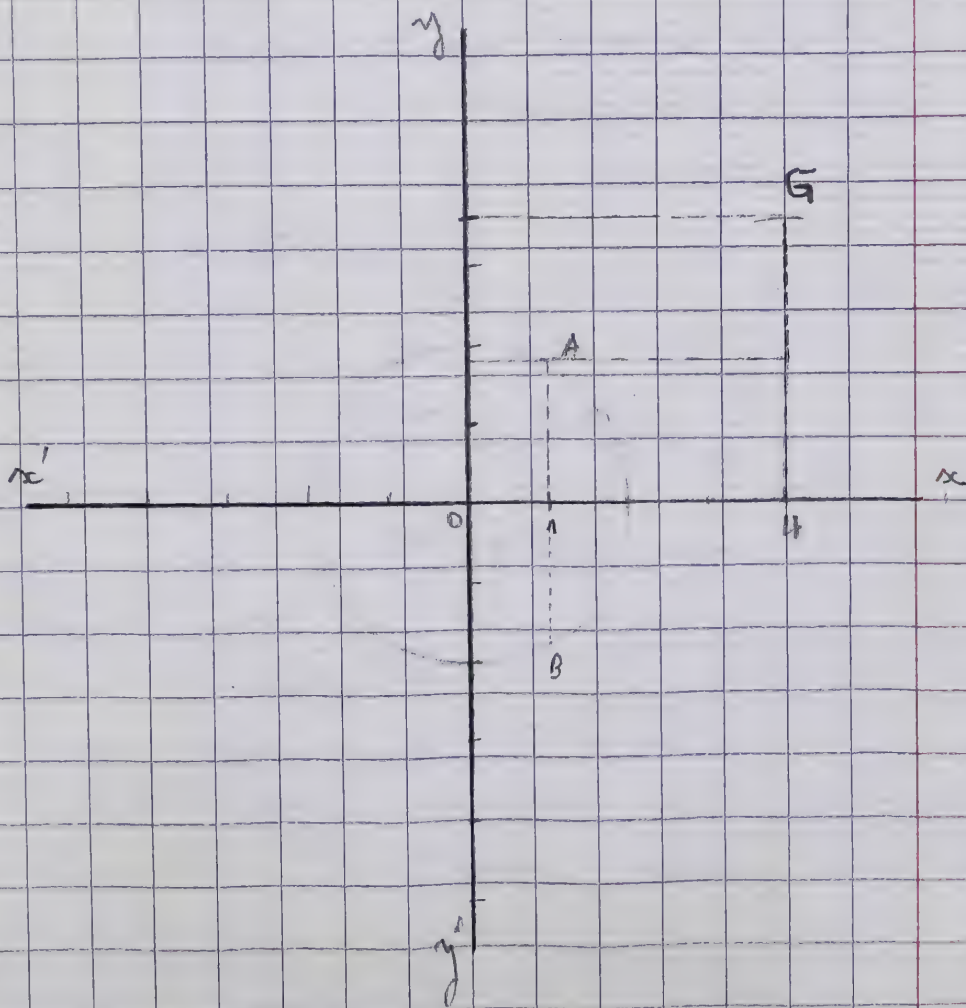
$$z_B = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_C = 4 + i\sqrt{3}$$

(1) إنشاء A, B, C



$A \in (C)$  ومنه  $OA = l$  أي  $|z_A| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$   
 حيث  $(C)$  الدائرة التي مركزها  $O$  و نصف قطرها  $R = 2$   
 بما أن  $\bar{z}_B = \bar{z}_A$  إذن  $B$  نظيرة  $A$  بالنسبة لـ  $\alpha'$   
 ولدنا  $y_C = y_A$





هنا كتابة  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  على الشكل الجبري

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{-2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3(2i\sqrt{3})}{(-2i\sqrt{3})(2i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6i\sqrt{3}}{4 \times 3}$$

$$= i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

استنتج أن صورة  $B$  بالتمثيل المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$

لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن

$$z_C - z_A = i \frac{\sqrt{3}}{2} (z_B - z_A)$$

حيث  $S(B) = C$  ومنه  $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z_B - z_A)$

حيث  $S$  التمثيل المباشر الذي مركزه  $A$  ونسبته  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وزاويته  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2h\pi$   $h \in \mathbb{Z}$



ج. بخش 3 مع G مرجع الزاویه  $\{(1,1), (0,-1), (2,4)\}$

بما أن  $1 + (-1) + 2 \neq 0$  از G موجود و وحید

$$\vec{z}_G = \frac{1 \times \vec{z}_A - 1 \times \vec{z}_B + 2 \vec{z}_C}{1 + (-1) + 2}$$

$$\vec{z}_G = \frac{1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3} + 2(4 + i\sqrt{3})}{2}$$

$$\vec{z}_G = 4 + 2i\sqrt{3}$$

از نشاء G

$$x_G = x_C = 4$$

$$y_G = 2y_C$$

ومنه انشاء G

حساب 3 بخش 1  $ABDG$  متوازی الاضلاع

$\vec{AB} = \vec{GD}$  متوازی الاضلاع متساوی الساقین

$$\vec{z}_B - \vec{z}_A = \vec{z}_D - \vec{z}_G$$

$$\vec{z}_D = \vec{z}_B + \vec{z}_G - \vec{z}_A$$

$$\vec{z}_D = 1 - i\sqrt{3} + 4 + 2i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}$$

$$\vec{z}_D = 4$$



المعريف  $M_4$

( $u_n$ ) المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ

متتالية تراجعية

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} \end{cases}$$

(1) احسب  $u_1, u_2, u_3$  لدنياً

$$u_1 = \frac{4}{4 - u_0}$$

$$u_1 = \frac{4}{4 - 1}$$

$$u_1 = \frac{4}{3}$$

$$u_2 = \frac{4}{4 - u_1}$$

$$u_2 = \frac{4}{4 - \frac{4}{3}}$$

$$u_2 = \frac{4}{\frac{12 - 4}{3}}$$

$$u_2 = \frac{4 \times 3}{8}$$

$$u_2 = \frac{3}{2}$$



$$u_3 = \frac{4}{4 - u_2}$$

$$u_3 = \frac{4}{4 - \frac{3}{2}}$$

$$u_3 = \frac{4}{\frac{8-3}{2}}$$

$$u_3 = \frac{4}{\frac{5}{2}}$$

$$u_3 = \frac{8}{5}$$

(2) نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $u_n = \frac{1}{u_{n-2}}$

(أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  أن  $u_n \neq 0$

طريقة ① البرهان بالتراجع

طريقة ② البرهان بالتناقض

نفرض أن  $u_n = 0$  صحيحة

ومنه

$$u_{n+1} = \frac{4}{4 - 0} \quad m \in \mathbb{N} \text{ من أجل}$$

$$u_{n+1} = u_n \text{ أي } u_{n+1} = 0 \text{ أي } (u_n) \text{ ثابتة}$$

$$2 = u_{n+1} = u_n = u_{n-1} = \dots = u_1 = u_0 = 1 \text{ ومنه}$$



تناقص

و  $M_n \neq 2$  و

(ب) بين ان  $(V_n)$  متتالية حسابية تزايدية  
رغم ان  $M_n < 2$

$$V_{n+1} - V_n = r \quad \text{متتالية حسابية تزايدية}$$

$n \in \mathbb{N}$  من اجل كل

لدينا

$$V_{n+1} = \frac{1}{M_{n+1} - 2}$$

$$= \frac{1}{4 - M_n}$$

$$= \frac{1}{4 - 2(4 - M_n)}$$

$$V_{n+1} = \frac{4 - M_n}{4 - 8 + 2M_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{4 - M_n}{2M_n - 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{4 - M_n}{2M_n - 4} - \frac{1}{M_n - 2}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{4 - M_n}{2(M_n - 2)} - \frac{1 \times 2}{2(M_n - 2)} \\
 &= \frac{4 - M_n - 2}{2(M_n - 2)} \\
 &= \frac{-M_n + 2}{2(M_n - 2)} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

حيث

$$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي  $(V_n)$  متتابعة حسابية  $\rightarrow$   $r = -\frac{1}{2}$  وحدها الأول هو

$$V_0 = \frac{1}{M_0 - 2}$$

$$V_0 = \frac{1}{1 - 2}$$

$$V_0 = -1$$

(3) أكتب  $V_n$  بدلالة  $n$  :

بما أن  $(V_n)$  متتابعة حسابية :

$$V_n = V_0 + n \times r$$

$$V_n = -1 + n \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$V_n = -\frac{1}{2}n - 1 \quad \text{أي}$$

بإستنتاج عبارة  $M_n$  بدلالة  $n$  :



$$u_n - 2 = \frac{1}{V_n} \quad \text{اذن} \quad V_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

$$u_n = \frac{1}{V_n} + 2$$

$$u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2}n - 1} + 2 \quad \text{حيث}$$

$$u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2}n - 1} + \frac{2(-\frac{1}{2}n - 1)}{-\frac{1}{2}n - 1}$$

$$u_n = \frac{1 - n - 2}{-\frac{1}{2}n - 1}$$

$$u_n = \frac{-n - 1}{-\frac{1}{2}n - 1}$$

$$u_n = \frac{n + 1}{\frac{1}{2}n + 1}$$

(ج) حل المثال (ج) متقاربة  $(u_n)$  لـ 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{\frac{1}{2}n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\frac{1}{2}n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

ومنه  $(u_n)$  متقاربة (أب تقرباً) لـ 2



المعبر عن 175

متتالية موجبة  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \ln(e e^{u_n}) \end{cases}$$

(أ) أثبت أن  $(u_n)$  متتالية حسابية يتطلب تحسين أساسياتها

(ب) أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$   
 (ج) احسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$   
 حيث

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(أ) إثبات أن  $(u_n)$  حسابية يعني من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = r$$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(e e^{u_n}) - u_n \\ &= \ln 2 + \ln(e^{u_n}) - u_n \\ &= \ln 2 + u_n - u_n \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$r = \ln 2$  إذن  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسياتها  
 (ب) كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$

لدينا

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1) \times r \\ u_n &= 3 + (n-1) \ln 2 \end{aligned}$$



$$u_n = n \ln 2 + 3 - \ln 2$$

(3) حساب  $S_n$  بدلالة  $n$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$= \frac{n(3 + n \ln 2 + 3 - \ln 2)}{2}$$

$$= \frac{n(6 - \ln 2 + n \ln 2)}{2}$$

المقرر 176  
( $u_n$ ) متتالية حسابية متناصفة متناظرة  
حيث:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$$

(1) عين الأساس والحد الأول لهذه المتتالية

(2) أكتب الحد العام  $u_n$  بدلالة  $n$

(3) احسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$

حيث:

$$S_n = u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_{m-1}$$



1) حساب الأساس  $r$  و الحد الأول  
نضع

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{عدد الحدود} \\ \text{عدد فردي} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_2 - r \\ u_2 \text{ (حد وسط)} \\ u_3 = u_2 + r \end{array} \right.$$

ومنه  $u_1 + u_2 + u_3 = 24$  نكتب:

$$u_2 - r + u_2 + u_2 + r = 24$$

$$3u_2 = 24$$

$$u_2 = 8 \quad \text{ومنه}$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \quad \text{والحد الثالث}$$

$$(8-r)^2 + 8^2 + (8+r)^2 = 210 \quad \text{نكتب}$$

$$8^2 - 16r + r^2 + 8^2 + 8^2 + 16r + r^2 = 210$$

$$2r^2 = 210 - 192$$

$$2r^2 = 18$$

$$r^2 = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 3 \\ \text{أو} \\ r = -3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{طالع مرفوعة لأن } (u_m) \\ \text{متناقضة تمامًا} \end{array}$$

ومنه الأساس هو  $r = -3$   
والحد الأول هو:

$$u_1 = u_2 - r$$

$$u_1 = 8 - (-3)$$

$$u_1 = 11$$



2D

$$u_1 + u_2 + u_3 = 24 \quad (1)$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \quad (2)$$

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \quad (3)$$

حسب (3) فإن (1) تب  
ومنه الزل تب

$$u_2 = 8$$

$$\begin{cases} u_3 = 16 - u_1 \\ u_1^2 + (16 - u_1)^2 = 146 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} u_1 + u_3 = 16 \\ u_1^2 + u_3^2 = 210 - 64 = 146 \end{cases}$$

(x) تب

$$u_1^2 + 16^2 - 32u_1 + u_1^2 - 146 = 0$$

$$2u_1^2 - 32u_1 + 256 - 146 = 0$$

$$2u_1^2 - 32u_1 + 110 = 0$$

$$u_1^2 - 16u_1 + 55 = 0$$

$$\Delta = (-16)^2 - 4(1)(55)$$

$$= 256 - 220$$

$$= 36$$

$$u_1' = \frac{16+6}{2} = 11$$

ومنه

$$u_1'' = \frac{16-6}{2} = 5$$

حالة مرفوضة

$$\begin{cases} u_1 > u_2 > u_3 \\ u_1 > 8 > u_3 \end{cases}$$

ومنه الزل



والأساس هو

$$r = u_2 - u_1 = 2 - 11 = -9$$

(2) كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r$$

$$u_n = 11 + (n-1) \times (-9)$$

$$u_n = -9n + 20$$

(3) حساب  $S_n$  بدلالة  $n$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

$$= \frac{(n-1)(u_1 + u_{n-1})}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(-1 - 9n + 20)}{2}$$

$$= \frac{(n-1)(-9n + 19)}{2}$$

$$u_{n-1} = -9(n-1) + 20$$

$$u_{n-1} = -9n + 29$$

الخطوة 177

احسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  إذا كان

$$S_n = 1 + 6 + 11 + \dots + (5n + 1)$$



نلاحظ ان  $S$  هو مجموع  $(n+1)$  حدًا الأولى متتالية حسابية  $n$  حدًا الأولى  $r=5$  وأساسها

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{لأن}$$

أي عدد حدود  $S_n$  هو  $n+1$  من  $0$  إلى  $n$

$$S_n = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(5n+2)}{2}$$

ملاحظة

كيف يتم تعيين عدد حدود  $S_n$

$$u_1 = 1$$

$$u_p = 5n + 1$$

$$u_p = u_1 + (p-1) \times r$$

$$5n + 1 = 1 + (p-1) \times 5$$

$$5n + 1 = 1 + 5p - 5$$

$$p = n + 1 \quad \text{أي} \quad 5n + 5 = 5p$$

وهذا عدد حدود  $S_n$  هو  $n+1$



Bac S. E 2013  
الموضوع الثاني  
التمرين 10  
4,5 مقام

التمرين 17E

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \quad (E)$$

4) التحقق أن  $-2 - 3i$  حل لـ (E)

لدينا

$$(-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13$$

$$(-a - bi)^2 = (a + bi)^2 = 0$$

اذن  $-2 - 3i$  حل لـ (E)

إيجاد الحل الآخر

نبا أن معاملات المعادلة (E) أعداد حقيقية

اذن الحل الآخر هو  $(-2 - 3i) = -2 + 3i$

$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

(3)

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$z_1 = -2 - 3i \text{ بوضع } -2 - 3i + z_2 = -4$$

$$z_2 = -2 + 3i$$

$$z_A = -2 - 3i \quad (4)$$

$$z_B = i$$

مركزه A  
نصفه 1  
زاوية 2  
زاوية 3

و التشابه المباشر



حيث  $S(M) \neq M'$

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

الكتابة المركبة لـ  $S$  هي

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 0 + i \times 1 \\ &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z' - z_A &= \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_A) \\ z' &= \frac{1}{2} i (z + 2 + 3i) - 2 - 3i \\ z' &= \frac{1}{2} iz + i - \frac{3}{2} - 2 - 3i \end{aligned}$$

ومنه

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

هذه العبارة المركبة لـ  $S$  هي

$$z' = az + b$$

بما أن النسبة هي  $\frac{1}{2}$  والزاوية هي  $\frac{\pi}{2}$

$$a = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} i$$

$$z_A = \frac{b}{1-a}$$

وبما أن  $A$  هو المركز إذن

$$b = z_A(1-a)$$

$$b = (-2-3i)(1-\frac{1}{2}i) = -\frac{7}{2} - 2i$$

$$z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

لدينا  $S(B) = C$

$$z_c = \frac{1}{2}iz_B - \frac{7}{2} - 2i$$

$$z_c = \frac{1}{2}i(1) - \frac{7}{2} - 2i$$

$$z_c = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} - 2i$$

$$z_c = -4 - 2i$$



$$2\vec{AD} + \vec{AD} = \vec{0}$$

(3) D نقطة حيث:

أ) تبين أن D هو مركز النقطتين A و B المرتكبتين  
بمعاملتين يملك تعيينها

من أجل  $\alpha + \beta \neq 0$  موقع الحالة  $(\alpha, \alpha); (B, \beta)$  يعطى

$$\alpha \vec{DA} + \beta \vec{DB} = \vec{0}$$

$$\vec{0} = 2\vec{AD} + \vec{AD}$$

$$\vec{0} = 2\vec{AD} + \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{0}$$

$$3\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{0}$$

$$3\vec{DA} + \vec{DB} = \vec{0}$$

$$\{A; -3; (B; 1)\}$$

ب) حساب  $\vec{z}_D$

$$\vec{z}_D = \frac{-3\vec{z}_A + \vec{z}_B}{-3+1}$$

لدينا

$$\vec{z}_D = \frac{-3(-2-3i) + i}{-2}$$

$$\vec{z}_D = \frac{6+9i+i}{-2} = \frac{6+10i}{-2}$$

$$\vec{z}_D = -3-5i$$



$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i \quad \rightarrow \text{تبيين أن}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} &= \frac{-3 - 5i + 2 + 3i}{-4 - 2i + 2 + 3i} \\ &= \frac{-1 - 2i}{-2 + i} \\ &= \frac{i^2 - 2i}{-2 + i} \\ &= \frac{i(i - 2)}{-2 + i} \\ &= i \end{aligned}$$

استنتاج طبيعة ACD  
لدينا

$$\left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right| = |i| \quad \text{أو} \quad \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$$

$$\frac{|z_D - z_A|}{|z_C - z_A|} = 1 \quad \text{أو}$$

$$\frac{AD}{AC} = 1 \quad \text{أي}$$

وهذا

$$\text{Arg} \left( \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right) = \text{Arg}(i) \quad \text{ولدينا}$$



$$(\vec{AC}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$$

رسمه  $ACD$  مثلث قائم في  $C$  ومثلثا  $ACD$  المتساوي

المتتاليات الهندسية

تعريف

( $u_n$ ) متتالية هندسية  
أساسها  $q$

من أجل كل عدد  
طبيعي  $n$   
 $u_{n+1} = q \times u_n$

يعني

عبارة الحد العام

$$u_n = u_0 \times q^n$$

على قدر بين حدتين

$$u_{\square} = u_{\Delta} \times q^{\square - \Delta}$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$a, b, c$  حدود متتالية هندسية

يعني

$$b^2 = a \times c$$

$b$  الوسط الهندسي

مجموع حدود متتالية

فإذا كان الأساس  $\neq 1$  فإن



عدد الحدود (الأُسباص)  $1 -$   
 الحد الأول  $\times$  في المصروع  $1 -$

$$S = \frac{1 - (1 - x)^n}{1 - (1 - x)}$$

إذا كان الأسباص  $= 1$  فإن

$$S = \text{الحد الأول} \times \text{عدد الحدود}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0, & -1 < q < 1 \\ +\infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ \text{غير موجود}, & q < -1 \end{cases}$$

$M$  (عدد محدود من الأعلى بالعدد  $M$ )  
 يعني

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $u_n < M$

$m$  (عدد محدود من الأسفل بالعدد  $m$ )  
 يعني

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا  $m < u_n$



Bac S.E 2014 (119) المبرهن

الموضوع

المبرهن

IN  $u_n = e^{\frac{1}{2} - n}$  حيث  $(u_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  (I)  
أثبت أن  $(u_n)$  هندسي

$u_{n+1} = q \times u_n$   $n \in \mathbb{N}$  من أجل كل  $n$  (II)

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2} - (n+1)}$$

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2} - n - 1}$$

$$u_{n+1} = e^{\frac{1}{2} - n} \times e^{-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} \times u_n$$

وهذا  $(u_n)$  من نسبة الثابت  $q = \frac{1}{e}$

وهذا الأول  $u_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  من حساب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2} - n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن}$$

الاستنتاج

$(u_n)$  متتالية متقاربة  
لأن

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$



(3) حساب  $S_n$  بدلالة  $n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

بما أن  $q \neq 1$  إذن  $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

فإن  $S_n$  يساوي

$$n - 0 + 1 = n + 1$$

$$S_n = \sqrt{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{e}}$$

$n \in \mathbb{N}$  مع  $V_n = \ln(u_n)$  II

$n$  اكتب  $V_n$  بدلالة  $n$

$$V_n = \ln(u_n)$$

$$V_n = \ln\left(e^{\frac{1}{2} - n}\right)$$

$$\ln e^a = a$$

إذن

$$V_n = \frac{1}{2} - n$$

استنتاج توقع التتابع  $(V_n)$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} - n - 1$$

$$V_{n+1} = V_n - 1$$

إذن  $(V_n)$  حساب متساوية  $r = -1$  وهذا الأول  $V_0 = \frac{1}{2}$

(2) حساب  $P_n$  بدلالة  $n$  الحد  $P_n$

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$$

$$P_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \ln u_2 + \dots + \ln u_n$$

$$P_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$



$$P_n = \frac{(n+1)(V_0 + V_n)}{2}$$

$$P_n = \frac{1-n^2}{2}$$

$$P_n = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - n\right)}{2} = \frac{(n+1)(1-n)}{2}$$

با  $n$  متغیر  $P_n + 4n > 0$  میبایست

$$\frac{1-n^2}{2} + 4n > 0$$

بنابراین  $P_n + 4n > 0$  میبایست

$$1 - n^2 + 8n > 0$$

$$-n^2 + 8n + 1$$

در اینجا  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$= 8^2 - 4(-1)(1)$$

$$\Delta = 68$$

$$n_1 = \frac{-8 + \sqrt{68}}{-2} \approx -0,123$$

$$n_2 = \frac{-8 - \sqrt{68}}{-2} \approx 8,123$$

$n$	$- \infty$	$-0,123$	$8,12$
$-n^2 + 8n + 1$	$-$	$0$	$+$

$-0,123 < n < 8,123$  میبایست  $-n^2 + 8n + 1 > 0$

بنابراین  $n \in \mathbb{N}$  و نیز

$$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$



السنة 180 Bac 2003

الموضوع ④ المبرين ④

$(u_n)$  متوفاة على  $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{4}{3} u_{n+1} - \frac{1}{3} u_n \end{cases}$$

$(v_n)$  متوفاة على  $\mathbb{N}$

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

حساب  $v_0$  و  $v_1$

$$\rightarrow v_0 = u_1 - u_0$$

$$v_0 = 2 - 1$$

$$v_0 = 1$$

$$\rightarrow v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_1 = \frac{7}{3} - 2$$

$$v_1 = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{4}{3} u_1 - \frac{1}{3} u_0$$

$$u_2 = \frac{4}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 1$$

$$u_2 = \frac{7}{3}$$

نبرهن أن  $(v_n)$  متوفاة

$$v_{n+1} = 9 \times v_n : n \in \mathbb{N}$$



$$V_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{1}{3} u_{n+1} - \frac{1}{3} u_n - u_{n+1} \quad \text{من (1)}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} u_{n+1} - \frac{1}{3} u_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} (u_{n+1} - u_n)$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{3} V_n$$

لدينا  $q = \frac{1}{3}$  إذن  $(V_n)$  متسلسلة هندسية

$$V_0 = 1 \quad \text{الاول}$$

(3) حساب  $S_n$  بدلالة  $n$  لدينا

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$$

لدينا  $S_n = V_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$



ج) بپوشان آن  
لدينا

$$u_n = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right]$$

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}$$

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1})$$

$$\frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right] = -u_0 + u_n$$

$$\frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right] = -1 + u_n$$

$$\frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right] + 1 = u_n$$

ج) تبیین آن (مستقریة)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right] + 1 \right\}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^n = 0 \quad \text{و} \quad \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \quad \text{و} \quad \frac{5}{2}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



بهدف إثبات صحة التراجع أنه من أجل كل عدد صحيح

$$u_n = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right] + 1$$

نستعمل  $P(n)$  هذه الخاصية

من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0 = 1$  (فرضاً)

الطريق ①

$$\begin{aligned} \text{ولدينا} \quad & \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^0 \right] + 1 \\ &= \frac{3}{2} (1 - 1) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$u_0 = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^0 \right] + 1 = 1$$

وهذا  $P(0)$  صحيحة

فنفرض أن  $P(m)$  صحيحة أي

$$u_m = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^m \right] + 1$$

نثبت الآن أن  $P(m+1)$  صحيحة أي

$$u_{m+1} = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^{m+1} \right] + 1$$

لنثبت

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= v_m + u_m \\ &= \left( \frac{1}{3} \right)^m + \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^m \right] + 1 \\ &= \left( \frac{1}{3} \right)^m + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^m + 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\
 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 \\
 &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + 1 \\
 &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + 1 \\
 &= \frac{3}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right] + 1
 \end{aligned}$$

$$u_n = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] + 1 \text{ هي صيغة عامة } P(n+1) \text{ هي}$$

الفرق 121 BAC S.E 2000 التوقع  
الفرق 1 3 نقاط

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2}$$

(1) حسابية (2) المتتالية (3)  $(v_n)$

(4) حسابية

(5) لا هي حسابية ولا حسابية

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$$

$$= 3u_n + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= 3u_n + \frac{3}{2}$$



$$V_{n+1} = 3(u_n + \frac{1}{2})$$

$$V_{n+1} = 3 V_n$$

إذاً  $(V_n)$  متسلسلة هندسية  $q=3$  ونبدأ من  $V_0 = -1 + \frac{1}{2}$   
 أو  $V_0 = -\frac{1}{2}$

$$V_0 = u_0 + \frac{1}{2}$$

$$V_0 = -1 + \frac{1}{2}$$

$$V_0 = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} +\infty \\ -\frac{1}{2} \\ -\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (0) \\ (2) \end{array} \quad \text{نطاق } (u_n) \text{ هو } (-\infty, +\infty)$$

نطاق  $(V_n)$  هو  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$q=3 \quad \text{و} \quad V_n = (-\frac{1}{2}) \times 3^n$$

$$V_0 = -\frac{1}{2}$$

$$u_n = V_n - \frac{1}{2}$$

$$u_n = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2} \right] = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$$



$$S_n = \frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}] \quad \text{حيث } 3$$

$$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$$

(b)

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} \quad (i)$$

$$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4} \quad (b)$$

(c)

$$S_n = \frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$$

$$S_n = \frac{1}{2} [1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}]$$

$$S_n = \frac{1}{2} [1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n]$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-3^{n+1}}{-2}$$

$$S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$$

أو انطباع (2) هو الصحيحة



التقريب

لنكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

أ) نرهن بالتراجع أن  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 3  
ب) ندرس اتجاه تغير المتتالية مستنتجاً أنها متقاربة وأثبت  
نهايتها

ج) لنكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بـ  $v_n = n(3 - u_n)$

نرهن أن  $(v_n)$  محدودة من أعلى، حدد عناصرها  
د) عر عن  $(v_n)$  و  $(u_n)$  بدلالة  $n$  ثم احسب نهايتها  
 $(u_n)$

هـ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}^*$   $u_n \leq 3$

نسمي هذه الخاصية  $P(n)$

ما من أجل  $n=1$  لدينا  $u_1 = 1 \leq 3$  أي  $P(1)$  صحيحة

منفرد أن  $P(n)$  صحيحة أي  $u_n \leq 3$  (فرضية التراجع)

نرهن أن  $P(n+1)$  صحيحة أي  $u_{n+1} \leq 3$

بما أن

إذن

$$\frac{n}{2(n+1)} u_n \leq \frac{3n}{2(n+1)}$$

وبعد

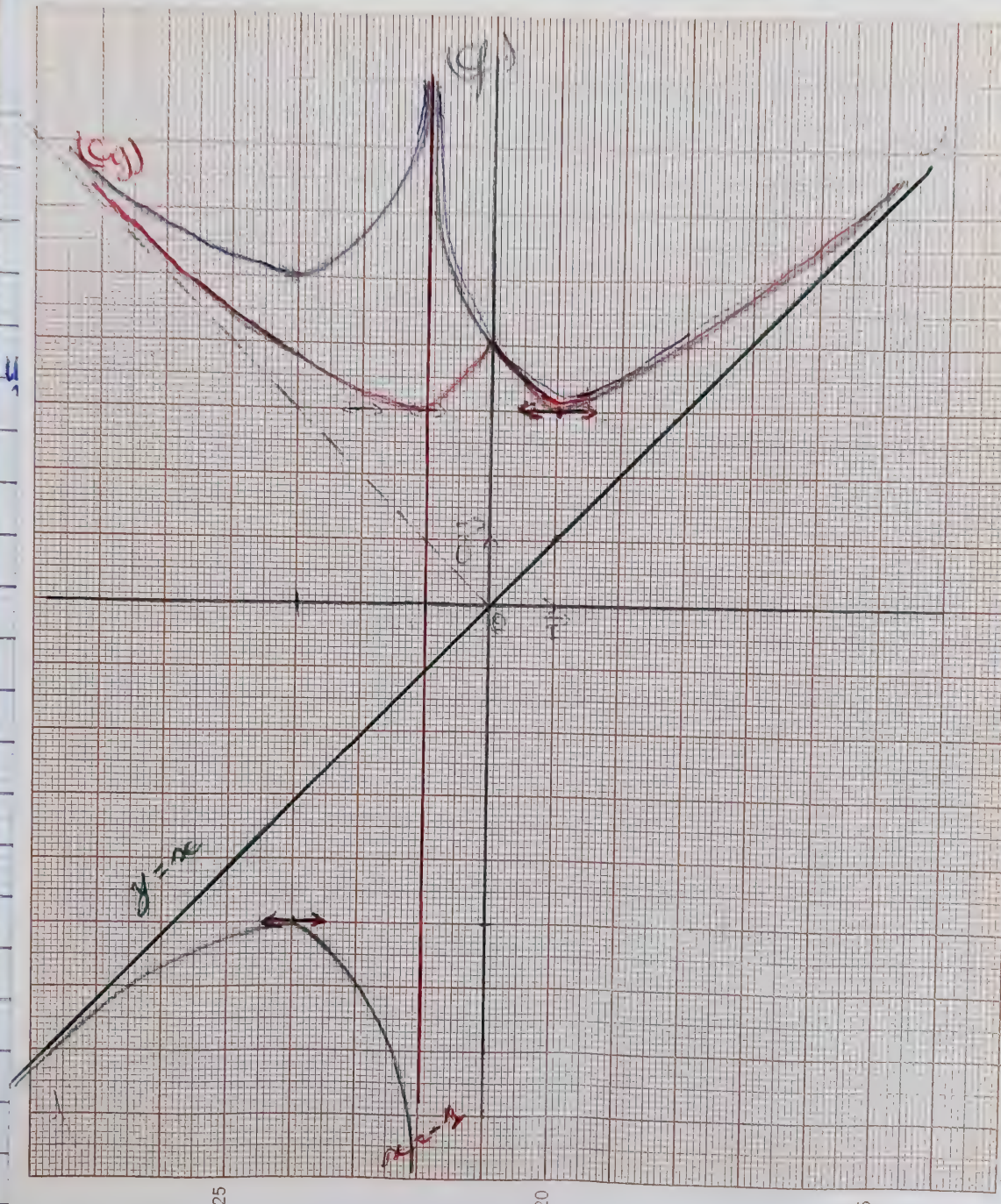
نضرب

الطرفين

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq 3$$

بما أن





25

20

15



$$\frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} < \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$u_{n+1} < \frac{3n+3n+6}{2(n+1)}$$

فإذا  $P(n+1)$  أو  $u_{n+1} < 3$  أو  $u_{n+1} < \frac{6(n+1)}{2(n+1)}$   
 و  $u_n < 3, n \in \mathbb{N}$  وهذا هو المطلوب

(2)  $(u_n)$  متزايدة لأن  $u_{n+1} - u_n$  نحتاج أن نثبت أنه

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - u_n$$

$$= \left[ \frac{n}{2(n+1)} - 1 \right] u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n - 2(n+1)}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n - 2n - 2}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-n - 2}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$= \frac{-(n+2)}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \left[ -u_n + 3 \right]$$



$$u_n + 3 > 0 \quad , \quad \frac{n+2}{2(n+1)} > 0 \quad \text{نماذج}$$

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \text{إذن}$$

وهذه  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}^*$   
خاصة

و إذا كانت  $(u_n)$  محدودة من الأعلى  
و  
 $(u_n)$  متزايدة

فإن  $(u_n)$  متقاربة

و إذا كانت  $(u_n)$  محدودة من الأسفل  
و  
 $(u_n)$  متقاربة

فإن  $(u_n)$  متقاربة

نماذج  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 3 ومتزايدة

إذن  $(u_n)$  متقاربة  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

نماذج  $(u_n)$  متقاربة إذا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  مع  $l \in \mathbb{R}$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right]$$

$$l = \frac{n}{2(n+1)} l + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

$$2(n+1)l = nl + 3(n+2)$$

$$2(n+1)l - nl = 3(n+2)$$

$$[2n+2-n]l = 3(n+2)$$

$$(n+2)l = 3(n+2)$$

$$l = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$n \in \mathbb{N}^*$   $\forall$   $V_{n+1} = q \times V_n$   $q$   $\in \mathbb{R}$   $q \neq 0$   $(V_n)$   $\text{g.d.r.}$   $(0)$   
 $V_{n+1} = (n+1) \left( 3 - \frac{u_n}{2} \right)$

$$V_{n+1} = (n+1) \left[ 3 - \frac{n}{2(n+1)} u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right]$$

$$= (n+1) \left[ \frac{3 \times 2(n+1) - n u_n - 3(n+2)}{2(n+1)} \right]$$

$$= \frac{6n+6-3n-6-n u_n}{2}$$



$$V_{n+1} = \frac{3n - n u_n}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{n(3 - u_n)}{2}$$

نسبة التناقص  $(V_n)$  هي  
 $q = \frac{1}{2}$  وهو ثابت  
 موجب أصغر من 1

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

$$V_1 = 1(3 - u_1) = 3 - (-1) = 4$$

نلاحظ أن  $V_n$  تتناقص

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} \quad \text{حيث أن النسبة } (V_n) \text{ ثابتة}$$

$$V_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

نلاحظ أن  $u_n$  تتناقص

$$V_n = n(3 - u_n) \quad \text{حيث أن}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ فإن } \frac{V_n}{n} = 3 - u_n \quad \text{حيث أن}$$

$$u_n = -\frac{1}{n} V_n + 3$$

$$u_n = -\frac{1}{n} \times 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{n} \times 4 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + 3 \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \text{و} \quad = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$$

$$-1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{و} \quad \Delta$$

التقريب 183 BAC 2012 S.E. المصنوع الأول التقريب

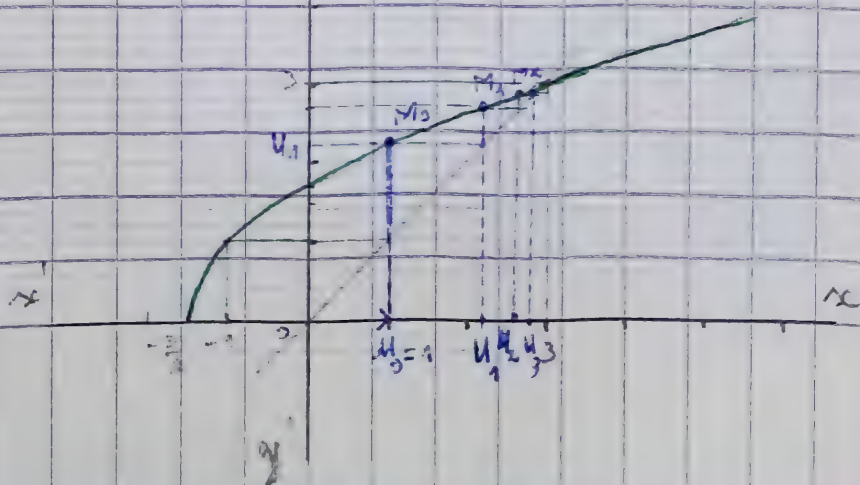
$$u_0 = 1$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$$

$$D_h = \left[ -\frac{3}{2}, +\infty \right[ \quad \text{مع} \quad h(x) = \sqrt{2x + 3} \quad (1)$$

$$(\Delta): y = x$$

(1) إعادة التمثيل





نصنل  $u_0, u_1, u_2, u_3$  على محور الفواصل (دون حسابها) لدينا

$$u_{n+1} = h(u_n) = \sqrt{2u_n + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{لدينا } u_1 &= h(u_0) \text{ بين } M(u_0; u_1) \\ u_2 &= h(u_1) \text{ بين } M(u_1; u_2) \\ u_3 &= h(u_2) \text{ بين } M(u_2; u_3) \end{aligned}$$

بالتحديد

لدينا  $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$  أي  $u_n$  متزايدة تمامًا  
و  $(u_n)$  تقترب من 3 فاصلة بصفة متناهية (و)  
(5)

(6) نعرف بالسم ايج أن  $u_n < 3$  ه  
نفس  $P(n)$  ه و المتطابقة

(7) متايل  $n=0$  لدينا  $u_0 = 0$  أي  $u_0 < 3$  ه  
أي  $P(0)$  معققة

(8) نعرف أن  $P(n)$  صحيحة أي  $u_n < 3$  ه  
(فرضية التراجع)

(9) نعرف صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} < 3$  ه  
لدينا  $u_n < 3$  ه (فرضية التراجع)

إذا  $h(0) < h(u_n) < h(3)$  لأن  $h$  متزايدة  
تمامًا



$$h(0) = \sqrt{3}, h(3) = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3 \text{ إذن } \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$$

$$0 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$$

أي صحة  $P(n+1)$  صحيحة ومنه نأخذ

$$0 < u_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(2 ب)

$$0 < u_n < 3 \text{ لدينا}$$

$$0 < 2u_n < 6 \text{ إذن}$$

$$3 < 2u_n + 3 < 6 + 3 \text{ أي}$$

$$\sqrt{3} < \sqrt{2u_n + 3} < \sqrt{9} = 3 \text{ إذن } \sqrt{3} < u_{n+1} < 3$$

بما أن  $u_n \in [0, 3]$

$$0 < \sqrt{3} < u_{n+1} < 3 \text{ أي}$$

أي صحة  $P(n+1)$  صحيحة

(3) أ) دراسة اتجاه تغير  $(u_n)$

① نحسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$  ثم نرى إننا نجد

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{2u_n + 3} - u_n)(\sqrt{2u_n + 3} + u_n)}{\sqrt{2u_n + 3} + u_n}$$



$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n+3})^2 - u_n^2}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n + 3}{\sqrt{2u_n+3} + u_n}$$

بما أن  $0 < u_n < 3$  إذن  $\sqrt{2u_n+3} + u_n > 0$

إذن إشارة  $u_{n+1} - u_n$  هي إشارة  $-u_n^2 + 2u_n + 3$  في المجال  $0 < u_n < 3$

$u_n$	-1	0	3
$-u_n^2 + 2u_n + 3$	0	+	0

بما أن  $0 < u_n < 3$

إذن  $-u_n^2 + 2u_n + 3 > 0$  أي  $u_{n+1} - u_n > 0$

وبما أن  $(u_n)$  متزايدة مقبولة



(- استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة

بما أن  $(u_n)$  متزايدة منتهية على  $\mathbb{N}$

وحدودها هي التي نلصقها بـ 3

إذن  $(u_n)$  متقاربة

حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

بما أن  $(u_n)$  متقاربة

إذن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

وهذا  $l = \sqrt{l+3}$

أو  $f(x) = \sqrt{g(x)}$

$[f(x)]^2 = g(x)$

$f(x) \geq 0$

$\begin{cases} l^2 = 2l + 3 \\ l \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} l^2 - 2l - 3 = 0 \\ l \geq 0 \end{cases}$

$\lim u_n = 3$  أو  $l = 3$  أو  $\begin{cases} l_1 = -1 \\ l_2 = 3 \\ l \geq 0 \end{cases}$



Bac S.E. 2013

المعريف (12.4)

② الموضوع

المعريف ②

$$(C_f) : f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

مع  $x \in [0, 1]$

$$(d) : y = x$$

(1) معرفة على  $\mathbb{N}$

$$u_0 = \frac{1}{2}$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n+1}$$

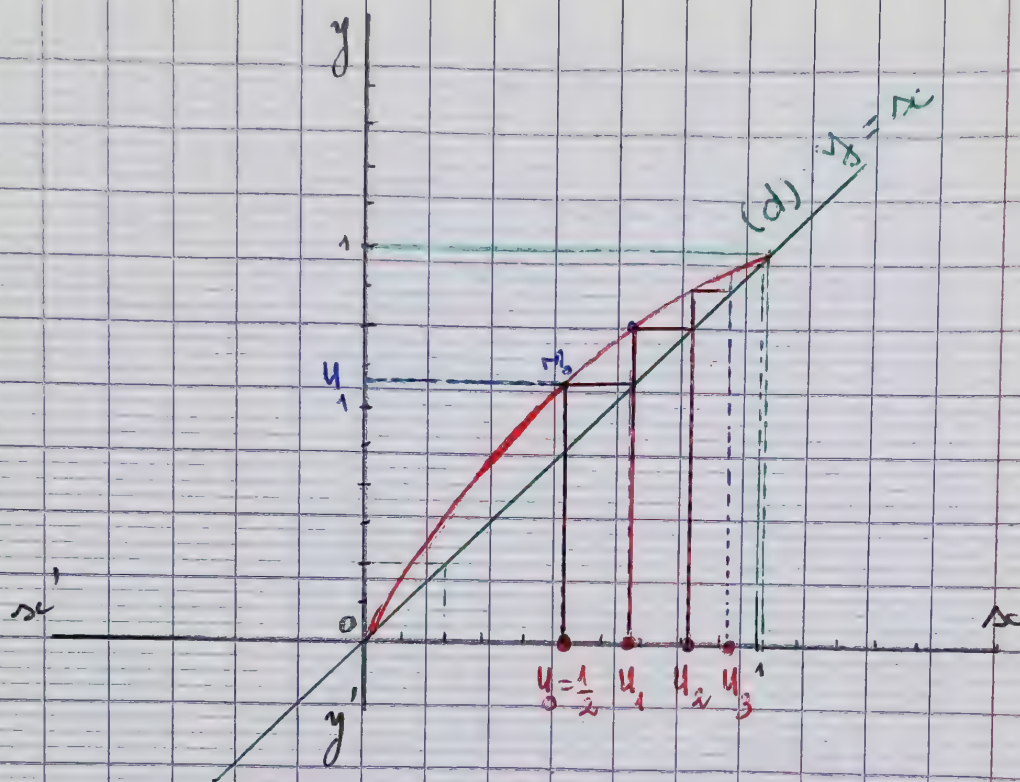
(2) إعادة الشكل

(3) تمثيل  $u_0, u_1, u_2, u_3$

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{نباين}$$

$$u_1 = f(u_0) \quad \text{نباين}$$





(ب) تخمين حول اتجاه تغير  $(M_n)$  وتقاربها  
 لدينا  $M_3 < M_2 < M_1 < M_0$  إذن  $(M_n)$  متزايدة فاصلاً على  $M$   
 وتقريب من فاصلة نقطة تقاطع  $(f)$  و  $(d)$   
 (ج) إثبات أن  $f$  متزايدة فاصلاً على  $[0, 1]$   
 لدينا

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1 \times 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

نلاحظ  $f'(x) > 0$  على  $[0, 1]$  فإن  $f$  متزايدة فاصلاً  
 على  $[0, 1]$



(ب) نبرهن بالتراجع عن أجل كل  $n \in \mathbb{N}$   
 $0 < u_n < 1$

سنثبت  $P(n)$  هذه الفرضية

(ب) من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0 = \frac{1}{2}$

أي  $0 < u_0 < 1$   
 وهذه  $P(0)$  صحيحة

من نقرض أن  $P(n)$  صحيحة أن  $0 < u_n < 1$  هي  
 الفرضية

نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $0 < u_{n+1} < 1$

بما أن  $0 < u_n < 1$

إن  $f(u_n) < f(u) < f(0)$  لأن  $f$  متزايدة قارئة  
 على  $[0, 1]$

أي  $0 < u_{n+1} < 1$  لأن  $f(u) = \frac{2(u)}{u+1}$  و  $f(0) = \frac{2(0)}{0+1} = 0$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

أي  $P(n+1)$  صحيحة

وهذه حسب مبدأ التراجع لدينا من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$

(ج)

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} = a + \frac{b}{u_n+1}$$

$$= \frac{2(u_{n+1}) - 2}{u_n+1}$$



$$u_{n+1} = 2 - \frac{2}{u_{n+1}}$$

$$1 < u_{n+1} < 2 \quad \text{و} \quad 0 < u_n < 1 \quad \text{بما}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{u_{n+1}} < 1 \quad \text{و} \quad 1$$

$$-2 \times \frac{1}{2} > -\frac{2}{u_{n+1}} > -2$$

$$2 - 2 \times \frac{1}{2} > 2 - \frac{2}{u_{n+1}} > 2 + 2$$

$$1 > u_{n+1} > 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_{n+1}} - 1 \quad (3b)$$

$$= \frac{2u_n - (u_{n+1})}{u_{n+1}}$$

$$u_{n+1} < 0 \quad \text{و} \quad u_n < 0 \quad \text{بما} \quad \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}} < 0$$

(3c)  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_{n+1}} - 1$   $u_n$   $u_n$   $u_n$

$$= \frac{2u_n - u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}}$$



$$= \frac{u_n - u_n^2}{u_{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - u_n)}{u_{n+1}}$$

بما أن  $0 < u_n < 1$

إذاً  $u_{n+1} > 0$

إذاً  $u_{n+1} - u_n$  إشارة  $u_n(1 - u_n)$

(بما أن  $0 < u_n < 1$  إذاً  $u_n(1 - u_n) > 0$ )

وهذا  $u_{n+1} - u_n > 0$  إذاً  $(u_n)$  متزايدة تمام على  $\mathbb{N}$

(3) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_{n-1}}{u_n} \quad ;$$

(أ) بيان أن  $(v_n)$  متسلسلة

$(v_n)$  متسلسلة أولها  $\frac{1}{2}$  وحدها  $\frac{1}{2}$  (بما أن  $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ )  
(بما أن كل  $n \in \mathbb{N}$ )

لذا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}$$

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2u_n}{u_{n+1}} - 1}{\frac{2u_n}{u_{n+1}}}$$



$$V_{n+1} = \frac{2u_n - u_{n-1}}{2u_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{u_{n-1}}{2u_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

فإذا كان  $q = \frac{1}{2}$  فالحل هو  $(V_n)$  هو

$$V_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0}$$

$$V_0 = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

نأخذ  $V_n$  في

الحل هو  $(V_n)$  هو

$$V_n = V_0 \times q^n$$

$$V_n = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



$$V_n = \frac{M_{n-1}}{M_n} \quad \text{Gibg}$$

$$V_n \times M_n = M_{n-1} \quad \text{Gibg}$$

$$V_n \times M_n - M_{n-1} = -1$$

$$(V_n - 1) M_n = -1$$

$$M_n = \frac{-1}{V_n - 1}$$

$$M_n = \frac{-1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

$$M_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 0 \quad \text{eing}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 1 \quad \text{Gibg}$$



(2) بما أن  $(u_n)$  متزايدة متناهية و  $u_1 > 0$  إذن  $u_n > 0$  لكل  $n$

بالنسبة لـ  $(u_n)$  لدينا

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \text{وحيث}$$

$$l = \frac{2l}{l+1} \quad \text{أي}$$

$$l^2, l = 2l$$

$$l(l-1) = 0 \quad \text{أي} \quad l^2 - l = 0$$

$$\begin{cases} l = 0 \\ l = 1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

لدينا  $l = 0$  حالة مرفوضة لأن  $(u_n)$  متزايدة  
علاوة على ذلك  $l = 1$

Bac S.F 2013

المعنى (485)

الموضوع 1

المعنى 2 4 نقاط

(I)  $(v_n)$  متناقلة معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ

$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

أثبت أن  $(v_n)$  متناقلة متناهية

لدينا

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}} \\ &= \frac{5^{n+1} \times 5}{6^n \times 6} \end{aligned}$$



$$V_{n+1} = \frac{5}{6} \times \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

$$V_{n+1} = \frac{5}{6} V_n$$

$q = \frac{5}{6}$  نسبة التناقص (V) هي  
 $V_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0}$  وذلك لأن

$$V_0 = 5$$

$$V_n = \frac{5^n}{6^n} \times 5 \quad \text{أي} \quad V_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

$V_n = 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$  وهو هو النسبة العامة

$V_0 = 5$  لأنه هو النسبة الأولى

$$q = \frac{5}{6}$$

$V_n = V_0 \cdot q^n$  لأنه هو الشكل

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  نريد أن نعرف

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$1 < \frac{5}{6} < 1 \quad \text{أي} \quad = 0$$



$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6} \end{cases} \quad \text{II}$$

(1) نبرهن بالتراجع إذا  $1 \leq u_n \leq 6$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 نفرض  $P(n)$  هي عبارة  $1 \leq u_n \leq 6$

عند  $n=0$  نلاحظ  $u_0 = 1$  أي  $1 \leq u_0 \leq 6$  إذن  $P(0)$  صحيحة

منه نفرض أن  $P(n)$  صحيحة أي  $1 \leq u_n \leq 6$  (فرضية التراجع)  
 نثبت بـ  $P(n+1)$  صحيحة أي  $1 \leq u_{n+1} \leq 6$   
 بما أن

$$1 \leq u_n \leq 6$$

إذن

$$5 \leq 5u_n \leq 30$$

$$6 \leq 5u_n + 6 \leq 36 \quad \text{أي}$$

$$\sqrt{6} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq 6$$

بما أن  $\sqrt{6} \approx 2.45$  و  $6 \approx 6$

$$1 \leq \sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 6 \quad \text{أي}$$

أن  $P(n+1)$  صحيحة

وهذا يدل على أن التراجع صحيح من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$ :  $1 \leq u_n \leq 6$



(2) دراسة المتغير  $(u_n)$   
لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{5u_n + 6} - u_n)(\sqrt{5u_n + 6} + u_n)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

$$= \frac{5u_n + 6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

بما أن  $u_n \leq 6$  فإن  $\sqrt{5u_n + 6} + u_n > 0$

إذن بدراسة إشارة  $-u_n^2 + 5u_n + 6$   
نجد، أنه صفرا -1 و 6

$u_n$	-1	1	6
$-u_n^2 + 5u_n + 6$	-	0	+

بما أن  $u_n \leq 6$  فإن  $-u_n^2 + 5u_n + 6 \geq 0$

أي أن  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  ومنه  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$

(3) نرصد أنه من أجل  $n \in \mathbb{N}$

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6} (6 - u_n)$$



$$\begin{aligned}
 6 - u_{n+1} &= 6 - \sqrt{5u_n + 6} \\
 &= \frac{(6 - \sqrt{5u_n + 6})(6 + \sqrt{5u_n + 6})}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{6^2 - (5u_n + 6)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$6 - u_{n+1} = \frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \cdot 5(6 - u_n)$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} < \frac{1}{6} \quad \text{is } 6 - u_{n+1} < \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

$$\sqrt{5u_n + 6} > 0 \quad \text{is}$$

$$6 + \sqrt{5u_n + 6} > 6$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} < \frac{1}{6} \quad \text{is}$$



(ب) تبين أنه من أجل كل  $n \in \mathbb{N}$   $0 < 6 - u_n \leq v_n$

$$0 < 6 - u_n < \frac{5^{n+1}}{6^n} \quad (\text{أو})$$

نلاحظ أن  $0 < 6 - u_n$  (حسب السؤال (أ))

نثبت أن  $6 - u_n \leq v_n$

**طريقة التراجع**

نفس  $f(n)$  هذه الخاصة

$$6 - u_0 = v_0 \quad \text{أو} \quad 6 - u_0 = 5 \quad \text{لأن } n=0 \text{ لدينا}$$

$$(6 - u_0 \leq v_0 \text{ أي } 5 \leq 5)$$

أو  $f(0)$  صحيحة

من أجل أن  $f(n)$  صحيحة أي  $6 - u_n \leq v_n$  (فرضية التراجع)

من أجل أن  $f(n+1)$  صحيحة أي  $6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$

لدينا  $6 - u_n \leq v_n$  (فرضية التراجع)

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6} (6 - u_n) < \frac{5}{6} v_n$$

أي  $6 - u_{n+1} \leq v_{n+1}$  أي  $f(n+1)$  صحيحة

وبذلك حسب مبدأ التراجع



(2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1)  $\Rightarrow$  (2)

$$6 - u_n \leq \frac{5}{6} (6 - u_{n-1}) \leq \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} (6 - u_{n-2}) \leq \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} (6 - u_{n-3})$$

$$\leq \dots \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$$

$$6 - u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 5 \quad \text{أي}$$

$$6 - u_n \leq v_n$$

(2)  $\Rightarrow$

لدينا

$$6 - u_n \leq \frac{5}{6} (6 - u_{n-1})$$

$$6 - u_{n-1} \leq \frac{5}{6} (6 - u_{n-2})$$

$$6 - u_{n-2} \leq \frac{5}{6} (6 - u_{n-3})$$

$\vdots$

$$6 - u_2 \leq \frac{5}{6} (6 - u_1)$$

$$6 - u_1 \leq \frac{5}{6} (6 - u_0)$$

وبالتالي طرفاً آخر

$$6 - u_n \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad (\text{ب) استنتاج}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - u_n) = 0 \quad \text{اذ } \begin{cases} 0 < 6 - u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$$

التمرين 186

$(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$

$$u_0 = 2$$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$$

أثبت أن  $u_n$  أقل لكل عدد صحيح  $n$

$$u_n = \frac{2n + 2}{2n + 1} \quad \text{فإن}$$

نستخدم  $P(n)$  هذه الخاصية

لنبدأ  $n=0$  (الطريق الأول)  $u_0 = 2$

$$(الطريق الثاني) \frac{2(0) + 2}{2(0) + 1} = 2$$

$$u_0 = \frac{2(0) + 2}{2(0) + 1} \quad \text{أي}$$

أي  $P(0)$  صحيحة



٥٥ نفرض أن  $P(n)$  صحيحة أي  $u_n = \frac{2n+2}{2n+1}$  (فرضية التراجع)

٥٥٥ نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} = \frac{2(n+1)+2}{2(n+1)+1}$

$$u_{n+1} = \frac{2n+4}{2n+3}$$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{3 \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right) - 2}{2 \left( \frac{2n+2}{2n+1} \right) - 1}$$

$$\frac{6n+6 - 2(2n+1)}{4n+4 - (2n+1)}$$

$$u_{n+1} = \frac{6n+6 - 4n - 2}{4n+4 - 2n - 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{2n+4}{2n+3}$$

$$u_{n+1} = \frac{2n+4}{2n+3}$$

أي  $P(n+1)$  صحيحة ومن ثم  $P(n)$  صحيحة (التراجع)

$$u_n = \frac{2n+2}{2n+1}$$



1.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 2.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 3.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 4.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 5.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 6.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 7.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 8.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 9.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 10.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$



(١٠) نفرض أن  $P(n)$  صحيحة أي  $u_n = (2n-1)^2$  (فرضية التراجع)

(١١) نبرهن صحة  $P(n+1)$  أي  $u_{n+1} = [2(n+1)-1]^2$

$$u_{n+1} = (2n+1)^2 \text{ أي}$$

$$u_{n+1} = u_n + 8n$$

حسب فرضية التراجع

$$u_{n+1} = (2n-1)^2 + 8n$$

$$u_{n+1} = 4n^2 - 4n + 1 + 8n$$

$$u_{n+1} = 4n^2 + 4n + 1$$

$$u_{n+1} = (2n+1)^2$$

أي  $P(n+1)$  صحيحة ، وبذلك حسب مبدأ التراجع لدينا

$$u_n = (2n-1)^2$$

التمرين ٢٨

فدالة معرفة على  $]-\infty; 2[$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$$

أثبت أن الدالة  $F$  المعرفة كمايلي :

$$F(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2}$$

أصلية للدالة  $f$  على  $]-\infty; 2[$



1.  $F$  دالة لاشتقاق على  $I$

يعني

من أجل كل  $x \in I$   
لدينا

$$F'(x) = f(x)$$

(2) قابلية الاشتقاق على

$F$  دالة أمثلة 1  $f$  على  $]-\infty; 2[$  يعني

من أجل كل  $x \in ]-\infty; 2[$

$$F'(x) = f(x)$$

بمعنى  $F$  دالة قابلية اشتقاق على مجالها  
تعریفها (أي على  $]-\infty; 2[$ )

ولدينا من أجل  $x \in ]-\infty; 2[$  لدينا

$$F'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - 1(x^2 - 5x + 7)}{(x-2)^2}$$

$$F'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x-2)^2}$$

$$F'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = f(x)$$



إذا كانت  $f$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $[-a, a]$

التمرين (183)

نعتبر الدالة  $f$  المعرفه على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 e^{2x}$   
 على الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  حيث تكون الدالة  $g$  المعرفه  
 على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$   
 أصلية لـ  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (مبدأ التفاضل)

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

$$x \mapsto e^{2x}$$

القابلين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

ومنه  $g$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $\mathbb{R}$  يعني من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = f(x)$$

$$(uv)' = u'v + u v'$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$g'(x) = (2ax + b)e^{2x} + e^{2x}(2ax^2 + bx + c)$$

$$g'(x) = (2ax + b + 2ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

$$g'(x) = (2ax^2 + (2a + b)x + b + c)e^{2x}$$

$x \in \mathbb{R}$  كل  $x$  في  $\mathbb{R}$  و

$$[2ax^2 + (2a + b)x + b + c]e^{2x} = x^2 e^{2x}$$

نقسم الطرفين على  $e^{2x}$  فيكون

$$2ax^2 + (2a + b)x + b + c = x^2 = x^2 + 0x + 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

وبالتالي نجد



$$g(x) = \left( \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{x/2}$$

وذلك

المعروف 130

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي

$$f(x) = x + 5 + 6 \ln \left( \frac{x}{x-1} \right)$$

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x \cdot \ln \left( \frac{x}{x-1} \right) + 6 \ln(1-x)$$

بين أن  $g$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $]0; +\infty[$

$g$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $]0; +\infty[$  يعني:  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$

مماثل كل  $x \in ]0; +\infty[$

$$g'(x) = f(x)$$

لذا  $g$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$

لا بد أن  $x \rightarrow \frac{x^2}{2} + 5x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$x \rightarrow 6x \ln \left( \frac{x}{x-1} \right)$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  وعلى  $]1; +\infty[$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$\frac{x}{x-1}$	+	0	-	+



$] -\infty, 1[$  für  $\epsilon$  beliebiges  $x \rightarrow \epsilon \ln(1-x)$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$1-x$	$+$	$0$	$-$

$$g'(x) = \frac{2x}{2} + 5 + \epsilon \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x \times \frac{1(x-1) - 1 \times x}{(x-1)^2} + 6x \frac{-1}{1-x}$$

$$\frac{x}{x-1}$$

$$g'(x) = x + 5 + \epsilon \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$g'(x) = f(x)$$

$] -\infty, 0[$  für  $f$  ist also  $g$  ist!

$$6x \times \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x}{x-1} \quad \epsilon$$

$$\frac{x}{x-1} \quad 1-x$$

$$6'x$$

$$= 6x \times \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} \times \frac{\epsilon}{1-x}$$

$$= -\frac{6}{x-1} \times \frac{\epsilon}{1-x}$$

$$= \frac{\epsilon}{-x+1} = \frac{\epsilon}{1-x}$$

$$= 0$$



المعريف (191)

$F$  و  $G$  دالتان معكوتتان على  $\mathbb{R}$  :

$$F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$$

$$G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$$

نحقق أن  $F$  و  $G$  متصلتان لبعض الدالة على  $\mathbb{R}$

(1n)

$F$  قابلة للتفاضل على  $\mathbb{R}$  (لأن  $D_F = \mathbb{R}$ ) و  $F$  دالة كسرية

$$F'(x) = \frac{(10x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(5x^2-x+3)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{10x^3 + 10x^2 + 10x - x^2 - x - 1 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 5x^2 + x - 3}{(x^2+x+1)^2}$$

$$F'(x) = \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2+x+1)^2}$$

$G$  و  $G$  قابلة للتفاضل على  $\mathbb{R}$  (لأن  $D_G = \mathbb{R}$ ) و  $G$  دالة كسرية

$$G'(x) = \frac{-6(x^2+x+1) - (2x+1)(-6x-2)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$G'(x) = \frac{-6x^2 - 6x - 6 + 12x^2 + 4x + 6x + 2}{(x^2+x+1)^2}$$



$$G'(x) = \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$x \in \mathbb{R}$  است

$$F'(x) = G'(x) = \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

فرض کنیم  $F$  و  $G$  در  $\mathbb{R}$  برابری داشته باشند

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{6x^2 + 4x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$F(x) = G(x) = f(x)$$

$$F'(x) = G'(x) = 0$$

$$(F - G)'(x) = 0$$

$$F - G = C$$

$x \in \mathbb{R}$  است

$$F(x) - G(x) = C$$

فرض کنیم  $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} - \frac{6x - 4}{x^2 + x + 1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2 - 5x + 7}{x^2 + x + 1}$$

$$F(x) - G(x) = \frac{5(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$F(x) - G(x) = 5$$

$$(x^2 + x + 1 \neq 0 \forall x)$$



وهنا  $F$  و  $G$  أمثليتان لنفس الدالة  
خوادم

ما إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$

فإن  
في تقبل دوالاً أمثلية على  $I$

ما إذا كانت  $F$  دالة أمثلية لها الدالة  $f$  على  $I$   
فإن

كل الدوال الأمثلية لها الدالة  $f$  على  $I$  هو الدوال

$$x \mapsto F(x) + k$$

$k$  عدد حقيقي ثابت

المقرر 192

جد الدوال الأمثلية على  $\mathbb{R}$  || الدوال  $f$  التي هي كلاً من

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^2 - x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = x^3 - 6x - 1 \quad (2)$$

$$f(x) = (2x-3)^3 (x+2) \quad (3)$$



$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 - x + 3 \quad (1)$$

ما أن  $f$  دالة كثير حدود، إذن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$   
ومنه  $f$  قابل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  حيث

$$F(x) = \frac{1}{5+1} x^{5+1} - 5x \frac{1}{4+1} x^{4+1} + 6x \frac{1}{2+1} x^{2+1} - \frac{1}{1+1} x^{1+1} + 3x + C$$

$$F(x) = \frac{1}{6} x^6 - x^5 + 2x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3x + C$$

حيث  $C$  ثابت حقيقي

(2) لدينا

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x - 1}{3} - \frac{1}{3} x^3 - 2x - \frac{1}{3}$$

ما أن  $f$  دالة كثير حدود، إذن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  فهي قابلة  
دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  حيث

$$F(x) = \frac{1}{3} x \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 2x \frac{1}{1+1} x^{1+1} - \frac{1}{3} x + C$$

$$F(x) = \frac{1}{12} x^4 - x^2 - \frac{1}{3} x + C$$

حيث  $C$  ثابت

(3) لدينا

$$f(x) = (2x - 3)(x + 2)$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 3x - 6$$

$$f(x) = 2x^2 + x - 6$$



بما أن  $f$  دالة كسرية حدودية  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$   
 فهي تقبل دالة أصلية  $F$  معرفة بـ

$$F(x) = 2 \times \frac{1}{2+1} x^{2+1} + \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C + C$$

$$F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C + C$$

حيث  $C$  ثابت حتمي

التمرين 193

جد الدوال الأصلية على  $[0; +\infty[$  للدوال  $f$  المعرفة كالتالي

$$f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^2} + 2x - 1$$

$$f(x) = \left( 2x + \frac{1}{x^3} \right)^2 \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{5}{x} + 5x^2 - x + 3 \quad (3)$$

$$\frac{x^n}{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$



$$f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^2} + 2x - 1 \quad (1)$$

altes Integral und Ableitung  $\frac{1}{x^3}$  gegeben  
 :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$   
 :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$   
 :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$

$$F(x) = 2x \left( \frac{1}{(3-1)x^{3-1}} \right) - 5 \left( \frac{1}{(2-1)x^{2-1}} \right) + \frac{2x^2}{2} - x + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} + x^2 - x + C$$

$$f(x) = \left( 2x + \frac{1}{x^3} \right)^2 \quad (2)$$

$$= 4x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^6}$$

$$: \text{Cus } F \text{ ableit } f(x) = \frac{1}{x^3} \int_0^x f(x) dx : \int_0^x f(x) dx : \int_0^x f(x) dx$$

$$F(x) = \frac{4}{3} x^3 - \frac{4}{x} - \frac{1}{5x^5} + C$$

altes Integral und Ableitung  $\frac{1}{x^3}$  gegeben  
 :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$   
 :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$   
 :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$  :  $\int_0^x f(x) dx$



$$f(x) = \frac{x^5 + 5x^2 - x + 3}{x^4}$$

لحل

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4} + \frac{5x^2}{x^4} - \frac{x}{x^4} + \frac{3}{x^4}$$

أو

$$f(x) = x + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$$

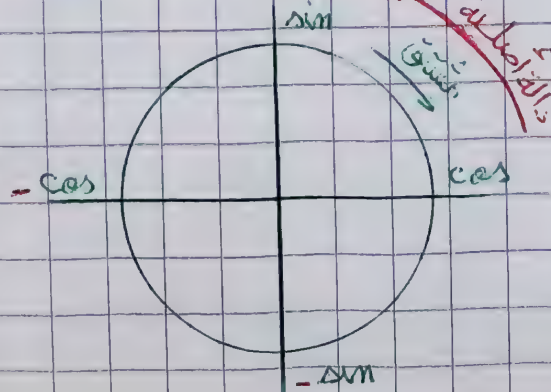
المطلوب: إيجاد  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  باستخدام قاعدة

لـ F

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5\left(-\frac{1}{(2-1)x^{2-1}}\right) - \left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right) + 3\left(-\frac{1}{(4-1)x^{4-1}}\right) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^3} + C$$

النتيجة:  $C$



positif  
(+)  
primitive



$$f(x) = \sin x$$

$$F(x) = -\cos x + C$$

$$f(x) = \sin(ax+b)$$

$$F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$a \neq 0$$

$$f(x) = \cos x$$

$$F(x) = \sin x + C$$

$$f(x) = \cos(ax+b)$$

$$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$a \neq 0$$

المثال 19.4

جدد الدوال الأصلية للدوال  $f$  التالية على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 3 \cos 2x - 5 \sin x + 7$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \sin(3x+2) - x + 2x^2$$

$$f(x) = 6 \sin(-x+3) + \frac{1}{2} \cos 4x$$

$$f(x) = 3 \cos 2x - 5 \sin x + 7 \quad (1)$$

لأن  $f$  دالة مستمرة على  $\mathbb{R}$  (مجموع دوال مستمرة على  $\mathbb{R}$ )

فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $\mathbb{R}$

$$F(x) = 3x \frac{1}{2} \sin 2x - 5(-\cos x) + 7x + C$$

$$F(x) = \frac{3}{2} \sin 2x + 5 \cos x + 7x + C$$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \sin(3x+2) - x + 2x^2 \quad (2)$$

(لأن  $f$  دالة مستمرة على  $\mathbb{R}$  (مجموع دوال مستمرة على  $\mathbb{R}$ ))

فإن  $f$  قابلة للتكامل على  $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{3} \cos(3x+2) \right] - \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{9} \cos(3x+2) - \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + C$$



$$f(x) = 6 \sin(-x+3) + \frac{1}{2} \cos 4x \quad (3)$$

لحل

$$F(x) = 6 \left( -\frac{1}{-1} \cos(-x+3) \right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sin 4x + C$$

$$F(x) = 6 \cos(-x+3) + \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

(195)

المعروف

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$f(x) = \cos^2 x$  : إيجاد الدالة  $f$  الأصلية للـ  $f$  المعطاة

$$f(x) = \cos^2 x \quad (1) \quad \sin$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{أو} \quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \quad \text{أو} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad \text{أو}$$

إيجاد الدالة  $F$  الأصلية لـ  $f$  المعطاة في  $\mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$f(x) = \cos x \sin x \quad (2)$$

أو

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \cos x \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{أو}$$

أو



$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right] + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$$

المطلوب 196

المطلوب 196

$$\begin{cases} \ln M_1 + \ln M_7 = -12 \\ \ln M_2 - \ln M_4 = 4 \end{cases}$$

المطلوب 196

$$\begin{cases} \ln (M_1 \times M_7) = -12 \\ \ln \left( \frac{M_2}{M_4} \right) = 4 \end{cases}$$

$$M_n = M_0 \times q^n$$

$$\begin{cases} M_1 \times M_7 = e^{-12} \\ \frac{M_2}{M_4} = e^4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 \times q^1 \\ M_7 &= M_0 \times q^7 \\ M_2 &= M_0 \times q^2 \\ M_4 &= M_0 \times q^4 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} M_0 \times q \times M_0 \times q^7 = e^{-12} \\ \frac{M_0 \times q^2}{M_0 \times q^4} = e^4 \\ M_0^2 \times q^6 = e^{-12} \\ \frac{1}{q^2} = e^4 \end{cases}$$

$$f(x) =$$



$$q^2 = \frac{1}{e^4}$$

من  $\frac{1}{q^2} = e^4$  نجد

أي  $x^2 = a$

$$\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \sqrt{\frac{1}{e^4}} = \frac{1}{e^2} \\ \text{أو} \end{cases}$$

$$q = -\sqrt{\frac{1}{e^4}} = -\frac{1}{e^2} \quad \left( \begin{array}{l} \text{مرفوضة لأن الحدود} \\ \text{موجبة دائماً} \end{array} \right)$$

$$q = \frac{1}{e^2}$$

أي

$$q = e^{-2}$$

حساب  $u_0$    
 بما أن  $q = e^{-2}$  و  $u_0^2 \times q^6 = e^{-12}$

$$u_0^2 \times (e^{-2})^6 = e^{-12} \quad \text{إذن}$$

$$u_0^2 \times e^{-12} = e^{-12}$$

أي

$$u_0^2 = 1$$

$$u_0 = 1$$

ونجد  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{أو} \\ u_0 = -1 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{مرفوضة} \end{array} \right)$



نمایش  $u_n$  کسری (2)

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{که}$$

$$(u_n = 1 \times (\frac{1}{e^2})^n \text{ می باشد})$$

$$u_n = 1 \times (\bar{e}^2)^n$$

$$u_n = \bar{e}^{2n}$$

نمایش  $S_n$  به صورت (3)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{که}$$

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{1 - (\bar{e}^2)^{n+1}}{1 - \bar{e}^2} = \frac{1 - \bar{e}^{2(n+1)}}{1 - \bar{e}^2}$$

نمایش  $\lim S_n$  به صورت

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \bar{e}^{2(n+1)}}{1 - \bar{e}^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{e}^{2(n+1)} = 0 \quad \text{پس}$$

$$= \frac{1}{1 - \bar{e}^2}$$

$$V_n = \ln u_n + \ln u_{n+1} \quad (4)$$

نمایش  $\rho(V_n)$  به صورت



$$u_n = e^{-2n}$$

$$V_n = \ln(e^{-2n}) + \ln e^{-2(n+1)} \quad \text{G.S.}$$

$$V_n = -2n - 2(n+1)$$

$$V_n = -4n - 2$$

also

$$V_{n+1} = -4(n+1) - 2$$

$$V_{n+1} = -4n - 4 - 2$$

$$V_{n+1} = (-4n - 2) - 4$$

$$V_{n+1} = V_n - 4$$

Arithmetische Folge  $(V_n)$  gilt

$$V_0 = -4(0) - 2 \quad \text{gilt also } r = -4$$

$$V_0 = -2$$

also (3b)

$$V_{n+1} - V_n = -4(n+1) - 2 - [-4n - 2]$$

$$= -4n - 4 - 2 + 4n + 2$$

$$= -4$$

n-ter Summe  $S'_n$  gilt

$$S'_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

also

G.S.

$$S'_n = \frac{(n+1)(V_0 + V_n)}{2}$$



$$S'_m = \frac{(n+1)(-2-4m-2)}{2}$$

$$S'_m = \frac{(n+1)(-4m-4)}{2}$$

$$S'_m = \frac{-4(n+1)(n+1)}{2}$$

$$S'_m = -2(n+1)^2$$

$n \in \mathbb{N}$  تعيين  $n$  بدلتا

$$[ -2(n+1)^2 ]^2 = 2^{30} \quad S'_m = 2^{30} \quad S'_m = 2^{30}$$

$$2^2(n+1)^4 = 2^{30}$$

$$(n+1)^4 = \frac{2^{30}}{2^2}$$

$$(n+1)^4 = 2^{28}$$

$$(n+1)^4 = 2^{7 \times 4}$$

$$(n+1)^4 = (2^7)^4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n+1 = 2^7 \\ n+1 = -2^7 \end{array} \right.$$

مرفوضه

$$n = 2^7 - 1$$

$$n = 127$$



$$(n+1) \in \mathbb{N} \text{ و } n+1 = \sqrt[4]{2^{28}} \quad (1 \text{ ب})$$

$$n+1 = 128$$

$$n = 127$$

$$(n+1)^4 = (2^7)^4 \quad (2 \text{ ب})$$

$$\ln[(n+1)^4] = \ln[(2^7)^4] \quad \text{و } \ln$$

$$4 \ln(n+1) = 4 \ln 2^7$$

$$\ln(n+1) = \ln 2^7$$

$$n+1 = 2^7$$

$$n = 127$$

القريب 197

حدد المجال الأقصى للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ ، مع العلم أن  $I = ]-1; +\infty[$  مع  $f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$  (1)

$I = \mathbb{R}$  مع  $f(x) = 2x^3(x^4+2)^3$  (2)

$I = \mathbb{R}$  مع  $f(x) = 3 \cos x \sin x$  (3)



$$I = \mathbb{R} \quad \text{مثال} \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \quad (4)$$

$$I = ]-1; +\infty[ \quad f(x) = \frac{6x^2}{(x^3+1)^4} \quad \text{لدنيا (1)}$$

$$u(x) = x^3 + 1 \quad \text{نضع} \quad f(x) = \frac{2 u'(x)}{[u(x)]^4}$$

$$u'(x) = 3x^2 \quad \text{و}$$

وهذه الدوال لا صلا

للدالة  $f$  على  $] -1; +\infty[$

$$u^n \times u' \quad \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

$$\frac{u'}{u^n} \quad \frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C$$

$$F(x) = -\frac{2 \times 1}{(4-1)[u(x)]^{4-1}} + C$$

$$F(x) = -\frac{2}{3(x^3+1)^3} + C$$

$$\frac{u'}{u} \quad \ln |u| + C$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \quad 2\sqrt{u} + C$$

لدنيا (2)

$$I = \mathbb{R} \quad \text{مثال} \quad f(x) = 2x^3(x^4+2)^3$$

$$u(x) = x^4 + 2 \quad \text{نضع} \quad f(x) = \frac{1}{2} x \times 2 \times 2x^3(x^4+2)^3$$

$$u'(x) = 4x^3 \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times [u(x)]^3$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} [u(x)]^{3+1} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{8} (x^4+2)^4 + C$$



$$I = \int \cos x \sin^5 x \, dx \quad \text{Let } f(x) = 3 \cos x \sin^5 x$$

$$u(x) = \sin x \quad \text{Then } f(x) = 3u'(x)[u(x)]^5$$

$$u'(x) = \cos x$$

$$F(x) = 3 \times \frac{1}{5+1} [u(x)]^{5+1} + C$$

$$F(x) = \frac{3}{6} \sin^6 x + C$$

$$I = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \, dx \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

$$u(x) = e^{2x} + 1 \quad \text{Then } f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$u'(x) = 2e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln |u(x)| + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln |e^{2x} + 1| + C$$

$$e^{2x} + 1 > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln (e^{2x} + 1) + C$$



المسألة 192

جد الدوال الأولية للدوال  $f$  التالية على المجال  $I$  كالتالي

$$I = ]0, +\infty[ : f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

$$I = ]0, 1[ : f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} \quad (2)$$

$$I = ]0, +\infty[ : f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \quad (3)$$

$$I = ]\frac{3}{2}, +\infty[ : f(x) = \frac{1}{2x-3} \quad (4)$$

$$I = ]0, +\infty[ : f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{المسألة (1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x \quad \text{نكتب}$$

$$u(x) = \ln x \quad \text{و} \quad f(x) = u'(x) \times u(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{حيث}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} [u(x)]^2 + C \quad \text{حيث}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$



$$I = ]0, 1[ \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} \quad (2)$$

$$f = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \quad \text{au Si}$$

$$\frac{1}{axb} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

$$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2} \quad \text{au}$$

$$u(x) = \ln x \quad \text{choix}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F(x) = -\frac{1}{(2-1)[u(x)]^{2-1}} + C \quad \text{choix}$$

$$F(x) = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$$I = ]0, +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \quad (3)$$

$$u(x) = e^x - 1 \quad \text{choix} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

$$u'(x) = e^x$$

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} + C \quad \text{choix}$$

$$F(x) = 2\sqrt{e^x - 1} + C$$



$$I = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[ \quad f(x) = \frac{1}{2x-3} \quad \text{لحل (4)}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-3} \quad \text{نكتب}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln |2x-3| + c \quad \text{نجد}$$

$$2x-3 > 0 \quad \text{في } I \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x-3) + c$$

المسألة 199

المسألة 199: إيجاد الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x - 1}$$

نلاحظ أن  $f$  هي دالة حقيقية و  $a$  و  $b$  حقيقيين يكونان صاينين لكل  $x \in ]0; +\infty[$

$$f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$

نلاحظ أن  $f$  هي دالة حقيقية و  $a$  و  $b$  حقيقيين يكونان صاينين لكل  $x \in ]0; +\infty[$

$$f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$$



$$f(x) = \frac{e^x(e^x-1) + a(e^x-1) + b e^x}{e^x-1}$$

$$= \frac{e^{2x} - e^x + a e^x - a + b e^x}{e^x-1}$$

$$\frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x-1} = \frac{e^{2x} + (-1+a+b)e^x - a}{e^x-1}$$

is ä. b. g

$$\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 1-1 \\ 1+a+b=1 \\ a=-1 \end{cases}$$

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x-1}$$

ist a. b.

is a. b.

$$f(x) = \frac{e^{2x} + e^x - 1}{e^x-1}$$

$$= \frac{(e^{2x}-1) + e^x}{e^x-1}$$

$$= \frac{(e^x-1)(e^x+1) + e^x}{e^x-1}$$

$$= e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x-1}$$

$$a=1$$

$$b=1$$

is a. b.



جاءت  $f$  قابلة للتكامل على  $[0, +\infty[$  و  
 $f(x) = e^x + \frac{e^x}{e^x - 1}$  لـ  $x > 0$

والمسألة الأصلية للحوال  $f$  قابلة للتكامل على  $[0, +\infty[$  و  
 $F(x) = e^x + x + \ln|e^x - 1| + c$   
 $F(x) = e^x + x + \ln(e^x - 1) + c$   
 $e^x - 1 > 0$  لـ  $x > 0$

$u' x e^u$ $e^{ax+b}$ $a \neq 0$	$e^u + c$ $\frac{1}{a} e^{ax+b} + c$
--	---

التمرين 200

حدد الحوال الأصلية للحوال  $f$  المرفقة على الحوال  $I$

- الحوال  $I$  هي:
- (1)  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = (\sin x) e^{\cos x}$
  - (2)  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = x e^{-x^2}$
  - (3)  $I = \mathbb{R}$  :  $f(x) = e^{x^2-3}$
  - (4)  $I = ]-1, +\infty[$  :  $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}}$

لـ (1)  $f(x) = (\sin x) e^{\cos x}$  لـ  $x \in \mathbb{R}$   
 $u(x) = \cos x$  و  $f(x) = (\sin x) e^u$   
 $u'(x) = -\sin x$



$$F(x) = -C \frac{u(x)}{e^{ax}} + C \quad \text{ans}$$

$$F(x) = -C \frac{e^{ax} x^2}{e^{ax}} + C$$

$$f(x) = x e^{-x^2}$$

( $x \mapsto x$  إلى  $u(x)$ )  $R$  في  $u(x)$   $f$   
 $x \mapsto e^{-x^2}$

$$f(x) = x e^{-x^2}$$

$$u(x) = -x^2 \text{ في } R$$

$$u'(x) = -2x$$

$$f(x) = \frac{1}{-2} (-2) x e^{-x^2}$$

$$u' e^u \rightarrow e^u + C$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$$

$R$   $f = f$   $F$   $u(x)$   $f$   $u(x)$

$$F(x) = -\frac{1}{2} e^{u(x)} + C \quad \text{so}$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$I = R$$

$$f(x) = e^{ax+b}$$

$$f(x) = e^{5x-3}$$

$$5x-3 \quad (3)$$

( $u$ )  $R$   $f = f$   $F$   $u(x)$   $f$   $u(x)$   
 $u \mapsto u$   $u \mapsto u$

$$F(x) = \frac{1}{5} e^{5x-3} + C$$



$$I = ]-1, +\infty[ : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} e^{\sqrt{x+1}} \quad (1)$$

$$u(x) = \sqrt{x+1} \text{ دالة } f(x) = -e^{u(x)} \times u'(x) \text{ حيث } u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

-  $f$  هي دالة  $F$  على  $I$  حيث  $I = ]-1, +\infty[$

$$F(x) = -e e^{\sqrt{x+1}} + C$$

$$a \in I$$

$$b \in I$$

$f$  مستمرة على  $I$  و

نقرا "الكامل في  $a$  و  $b$ "  
 $x$  في  $f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث  $F$  دالة أصل  $f$   
 القريب من

احسب التكاملات الآتية

$$\int_1^2 (x+1)^3 dx \quad (1)$$

$$\int_0^1 t e^{t^2-1} dt \quad (2)$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad (3)$$



$x \mapsto (x+1)^3$   $\int_1^2 (x+1)^3 dx = \left[ \frac{1}{4} (x+1)^4 \right]_1^2$   
 1P.  $\int_1^2 (x+1)^3 dx = \frac{1}{4} (2+1)^4 - \frac{1}{4} (1+1)^4$

$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4} (3)^4 - \frac{1}{4} (2)^4$   
 $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx = \frac{81}{4} - \frac{16}{4}$

$\int_0^1 t e^{t^2-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{2} 2t e^{t^2-1} dt$   
 $= \frac{1}{2} \int_0^1 2t e^{t^2-1} dt$   
 $= \frac{1}{2} [e^{t^2-1}]_0^1$   
 $= \frac{1}{2} (e^{1-1} - e^{0-1})$   
 $= \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$



$\int_0^\pi \sin x \, dx = \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi$  لدينا (3)  
 $= -\frac{1}{2} [\cos 2\pi - \cos 0]$   
 $= -\frac{1}{2} (\cos 2\pi - \cos 0)$

$= -\frac{1}{2} (1 - 1) = 0$

التمرين (2.02) (التمرين 14) "المشتق"

$g$  معرفة على  $\mathbb{R}^*$

$g(x) = 2x^3 - 3 + 6 \ln|x|$

(1) دراسة تغيرات  $g$

$D_g = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  (\*)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^3 - 3 + 6 \ln|x|)$  (\*)

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^3 - 3) = -3$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 6 \ln|x| = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$

$x \rightarrow 0^+$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e x^3 - 3 + 6 \ln|x|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[ e x^2 - \frac{3}{x} + 6 \frac{\ln|x|}{x} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

$$t = |x|$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( e x^2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, n \in \mathbb{N}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e x^3 - 3 + 6 \ln|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left[ e - \frac{3}{x^3} + \frac{6 \ln|x|}{x^3} \right]$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x^3} = 0$$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$u \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$[0, +\infty[ \text{ of } g ] = -\infty, 0[ \text{ of } g ] = +\infty$$

$$g'(x) = 6 x^2 - 3 + 6 x \frac{1}{x}$$



$$g'(x) = 6x^2 + \frac{6}{x}$$

$$g'(x) = \frac{6x^3 + 6}{x}$$

$$g'(x) = \frac{6(x^3 + 1)}{x}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \text{ اذا } g'(x) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x^3 = -1 \text{ اذا}$$

$$x^3 + 1 > 0 \text{ اذا } 6x^3 + 6 > 0$$

$$x^3 > -1$$

$$x \rightarrow x^3 \text{ اذا } x > -1 \text{ اذا } x^3 > (-1)^3$$

$$x > -1$$

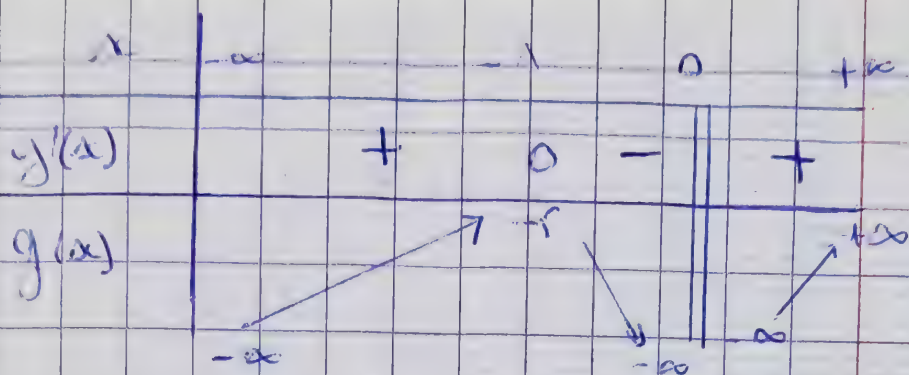
$$[-\infty; +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$6x^3 + 6$	-	0	+	+
x	-	0	-	+
g(x)	+	0	-	+

$$[0; +\infty[ \text{ اذا } g \text{ متزايدة } \text{ اذا } g \text{ متزايدة } \text{ اذا } g \text{ متزايدة}$$

$$[-1; 0[ \text{ اذا } g \text{ متناقصه } \text{ اذا } g \text{ متناقصه } \text{ اذا } g \text{ متناقصه}$$





$$g(-1) = 2(-1)^3 - 3 + 6 \ln|-1| = r$$

(2) نبيأ أن  $g(x) = 0$  قبل  $x$  وحيث  $x > 0$   
 $1,07 < x < 1,09$

بما أن  $g$  متزايدة وبتزايد  $x$  كلما اقتربنا من  $0$   
 لأن  $[0, +\infty[ \cap ]-\infty, -1] = \emptyset$  و  $[1,07, 1,09]$

$$\begin{cases} g(1,07) = 2(1,07)^3 - 3 + 6 \ln|1,07| \sim -0,14 \\ g(1,09) = 2(1,09)^3 - 3 + 6 \ln|1,09| \sim 0,11 \end{cases}$$

بما أن  $g$  متزايدة وبتزايد  $x$  كلما اقتربنا من  $0$   
 $1,07 < x < 1,09$   
 (مجموعة القيم المتوسطة)



$$D_f = \mathbb{R}^+ \quad \text{حيث} \quad f(x) = 2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{II}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4} \quad \text{بسيان أول}$$

$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$$

فناشلة لا تتغير على  $]0, +\infty[$  ولذا:

$$f'(x) = 2 - 3 \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln|x|}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = 2 - 3 \frac{x - 2x \ln|x|}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x + 6x \ln|x|}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4} \quad \text{حيث}$$

دالة تغيرات  $f$

$$D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \quad \text{I}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2}) =$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \quad \text{by}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2})$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x|$$

$$= -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2})$$

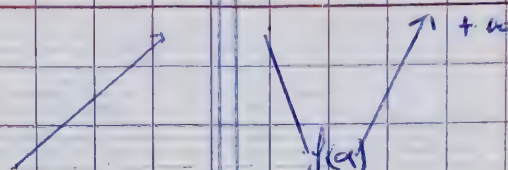
$$= +\infty$$

$$x \rightarrow 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \infty$$

$x$	$-\infty$	$0$	$0$	$+\infty$
$x$		$-$	$0$	$+$
$g(x)$		$-$	$-$	$0$
$f'(x)$		$+$	$-$	$0$



$f = 1/2 x^2, f' = 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$x$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$= 0$	$+$
$f(x)$				$+\infty$

$$f(x) = 3x - \frac{3}{2x^2} \quad \text{or} \quad f(x) = 3x - \frac{3}{2x^2}$$

$$f(x) = 2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2} \quad \text{or} \quad f(x) = 2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2}$$

is  $g(x) = 0$  or  $f(x) = 2x - 3 \frac{-2x^3 + 3}{6x^2}$

$$2x^3 - 3 + 6 \ln|x| = 0$$

$$\ln|x| = \frac{-2x^3 + 3}{6}$$

$$f(x) = 2x - 3 \ln|x| - \frac{-2x^3 + 3}{6x^2}$$

$$f(x) = 2x - \frac{-2x^3 + 3}{6x^2}$$

$$f(x) = 2x + \frac{2x^3}{2x^2} - \frac{3}{2x^2}$$

$$f(x) = 2x + x - \frac{3}{2x^2}$$

$$f(x) = 3x - \frac{3}{2x^2}$$



استنتاج حصر لـ  $f(x)$  لدينا

$$f(x) = 3x - \frac{3}{2x^2}$$

بما أن  $1,09 < x < 1,07$  إذن  $3,27 < 3x < 3,81$

ولدينا أيضا  $1,09^2 < x^2 < 1,07^2$  أي:

$$2 \times 1,07^2 < 2x^2 < 2 \times 1,09^2$$

أي:

$$\frac{1}{2 \times 1,09^2} < \frac{1}{2x^2} < \frac{1}{2 \times 1,07^2}$$

$$\frac{-3}{2 \times 1,07^2} < \frac{-3}{2x^2} < \frac{-3}{2 \times 1,09^2}$$

$$-1,31 < \frac{-3}{2x^2} < -1,26$$

وبالجمع (1) و (2) طرفًا لطرفًا نحصل

$$3,27 - 1,31 < 3x - \frac{3}{2x^2} < 3,81 - 1,26$$

أي

$$1,96 < f(x) < 2,01$$



(2) لتكن  $f$  الدالة المعطاة في  $[0, +\infty[$

$$f(x) = 3x - \frac{3}{2x^2}$$

نريد ان نثبت ان  $f$  دالة  
 $f'(x) = 3 - \left( \frac{3 \times 4x}{(2x^2)^2} \right)$

$$f'(x) = 3 - \frac{12x}{4x^4}$$

$$f'(x) = 3 - \frac{3x}{x^4}$$

ولما  $f'(x) > 0$  ان  $x \in ]0, +\infty[$  دالة  $f$  متزايدة  
 $\]0, +\infty[$  دالة  $f$  متزايدة  
 $1,07 < x < 1,09$  دالة  $f$  متزايدة

$$f(1,07) < f(x) < f(1,09)$$

$$3(1,07) - \frac{3}{2(1,07)^2} < f(x) < 3(1,09) - \frac{3}{2(1,09)^2}$$

$$1,899 < f(x) < 2,007$$



(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$  and (A)  $y = 2x$  is a straight line

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \end{array} \right.$$

(A)  $y = 2x$  is a straight line and (C)  $f(x) = 2x - 3 \frac{\ln|x|}{x^2}$

$$= -3 \frac{\ln|x|}{x^2}$$

!  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$  and  $x \in \mathbb{R}^+$

!  $x \neq 0$

$$|x| = 1 \text{ or } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x| = 0$$

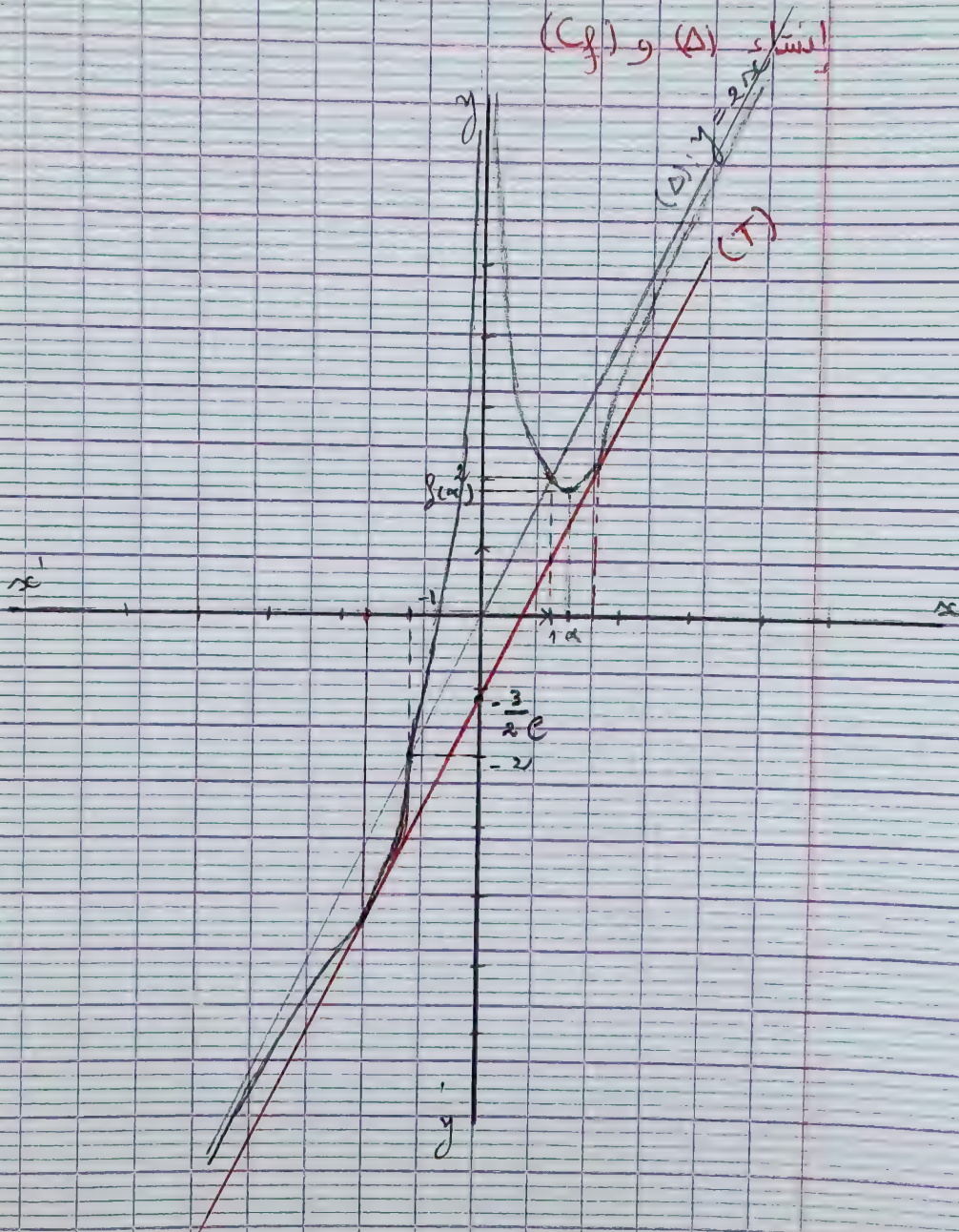
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1 \end{array} \right.$$

$x \neq 0$  and  $|x| < 1$  then  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x| < 0$

$x \neq 0$  and  $-1 < x < 1$  or



انشاء  $(\Delta)$  و  $(C_f)$





(ب) المناقشة بيانياً لحد خواصنا في حلول المعادلات

$$m x^2 + 3 \ln|x| = 0$$

المعادلة

من أجل  $x \neq 0$

$$\text{أي} \quad m x^2 + 3 \ln|x| = 0$$

$$m x^2 = -3 \ln|x|$$

$$m = \frac{-3 \ln|x|}{x^2}$$

$$2x + m = 2x - \frac{3 \ln|x|}{x^2}$$

$$2x + m = f(x)$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2x + m \end{cases}$$

$$y = 2x + m$$

حلول المعادلات الخطية هي نقاط تقاطع (cf)

والمستقيم  $(\Delta_m)$  الذي معادله  $y = 2x + m$

(أ) إذا كان  $m < -\frac{3}{2e}$  لا توجد حلول

حلول المعادلات

$$m = -\frac{3}{2e}$$

(ب) إذا كان

حلول المعادلات

سأكون

(ج) إذا كان

$$-\frac{3}{2e} < m < 0$$

(د) إذا كان

$$m > 0$$

(هـ) إذا كان

حلول المعادلات

حلول المعادلات



$$h(x) = \frac{a + b \ln|x|}{x} \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و } a, b \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Q: أوجد  $a$  و  $b$  بحيث تكون  $h$  دالة هارمونيه في  $\mathbb{R}^*$  نقطة

$$Q(x) = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

بما ان  $h$  دالة هارمونيه في  $\mathbb{R}^*$   $\Rightarrow h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^*)$  نقطة

$$h'(x) = b \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} (a + b \ln|x|)$$

$$h'(x) = \frac{b - a - b \ln|x|}{x^2}$$

$$h'(x) = Q(x) \quad x \in \mathbb{R}^* \quad \text{بما ان}$$

$$\frac{b - a - b \ln|x|}{x^2} = \frac{\ln|x|}{x^2}$$

بما ان  $x \in \mathbb{R}^*$  نقطة

$$\begin{cases} b - a = 0 \\ -b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \quad \text{و}$$

$$h(x) = \frac{-1 - \ln|x|}{x}$$



$$\frac{g(x_0)}{x_0^3} = 2$$

$$x \neq 0 \quad g(x_0) = 2$$

$$2x_0^3 - 3 + 6 \ln|x_0| = 2x_0^3$$

$$6 \ln|x_0| = 3$$

$$\ln|x_0| = \frac{1}{2}$$

$$|x_0| e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$x_0 = \sqrt{e}$$

$$x = -\sqrt{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - \frac{3 \ln|\sqrt{e}|}{(\sqrt{e})^2}$$

من أجل  $x = \sqrt{e}$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - \frac{3 \times \frac{1}{2} \ln e}{e}$$

$$f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

$$x = \sqrt{e}$$

من أجل

$$f(-\sqrt{e}) = -2\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

$$= \left( \sqrt{e}, 2\sqrt{e} - \frac{3}{2e} \right)$$

النقطة

$$= \left( -\sqrt{e}, -2\sqrt{e} - \frac{3}{2e} \right)$$



$$y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}) \rightarrow (T) \text{ is tangent}$$

$$y = 2(x - \sqrt{e}) + e\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

$$(T): y = 2x - \frac{3}{2e} \text{ is tangent}$$

$$y = f'(-\sqrt{e})(x + \sqrt{e}) + f(-\sqrt{e})$$

$$y = 2(x + \sqrt{e}) - e\sqrt{e} - \frac{3}{2e}$$

$$y = 2x - \frac{3}{2e}$$

المماس (T) في  $x = 0$  يتقاطع مع المحاور عند  $y' = 2$  و  $y = -\frac{3}{2e}$



	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$	
Input	+	0	-	-	0	+
-3 Input	-	0	+	+	0	-
$f(x) - y$	-	0	+	+	0	-
دالة $f$ بالسياسة	$(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$		$(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$		$(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$	
	$(\Delta) \downarrow$		$(\Delta) \uparrow$		$(\Delta) \downarrow$	

(Cf) يقع فوق (Δ) A(-1, -2)	(Cf) يقع تحت (Δ) B(1, 2)
-------------------------------	-----------------------------

(4) تبيان وجود محاسن (T) بواسطة (Δ)

لدينا معامل توجيه  $y = 2x$  هو 2  
 معامل توجيه (T) هو  $f'(x_0)$  حيث  $x_0 \in \mathbb{R}^*$   
 (T) // (Δ) معناه  $f'(x_0) = 2$  و  $x_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\alpha \neq 0 \text{ و } \frac{x_0 \cdot g(x_0)}{x_0^2}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x)$$

$x < 0 \Rightarrow x \rightarrow -\infty \Rightarrow -x \rightarrow +\infty$   
 $|x| = -x$  vì  
 $x = -t$  và  $t = -x$  (đổi)

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln x}{x}$$

$= 0$

$$\lim_{x \leq 0} \ln|x| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$$

$t = |x|$  (đổi)  
 $t \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow -\infty$

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \ln x \geq 0 \\ -\ln x, & \ln x < 0 \end{cases}$$



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدينة

الهاتف: 05.50.58.85.27

البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



معانحو التميز

BPA

أكاديمية رواد التائق لخدمات  
التنمية البشرية والاستشارات

## تمارين الرياضيات 3 ثانوي

الأستاذ: داهش مكي

مسألة: لنكن  $f$  دالة عددية حصة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 2x - 1}{1 - 2x} & \text{و } x \leq 0 \\ 2x - \frac{1}{(x+1)^2} & \text{و } x > 0 \end{cases}$$

أو مجموعة التعريف لدالة  $f$

② أدرس باستمرارية وقابلية الاشتقاق لدالة  $f$  عند 0  
و فسر النتيجة هندسياً

③ أدرس تغيرات الدالة  $f$

④ بين أن الممتنع (١) يقبل مقارنتين ماثلتين

⑤ بين أن الممتنع (٢) يقبل حامل محور الفواصل في نقطتين  
خاصة هما  $x = -1$  و  $x = 1$  حيث  $0 < x < 1$

⑥ رسم منحنى الدالة  $f$

⑦ لنكن  $g$  دالة عددية معرفة كما يلي

$$g(x) = \frac{3x^2 - 2|x| - 1}{2|x| + 1}$$

⑧ بين أن  $g$  دالة زوجية

⑨ أكتب  $g$  دون مراعاة المطلقة

⑩ لاستخرج منحنى الدالة  $g$

⑪ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  إشارة وحلول  
المعادلة  $3x^2 - 2m|x| - m = 0$



امتحان بكالوريا شعبة علوم تجريبية دورة جوان 2014

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ .

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $0.7 < \alpha < 0.8$ .

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(II) - نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ .

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ .

ب) استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيماً مقارباً مثلثاً  $(\Delta)$  يطلب تعيين معادلته له.

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$ .

(3) أ) بيّن أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$  حيث  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ .

ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ . (نأخذ  $f(\alpha) \approx -0.1$ )

(4) احسب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .

(5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$ .

(6) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ .

و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) = f(x) - 2$ .

ب) استنتج أن  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ  $(C_h)$ .



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدينة

الهاتف: 05.50.58.85.27

البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



معنا نحو التميز

أكاديمية رواد التلق كخدمات

التنمية البشرية والاستشارات

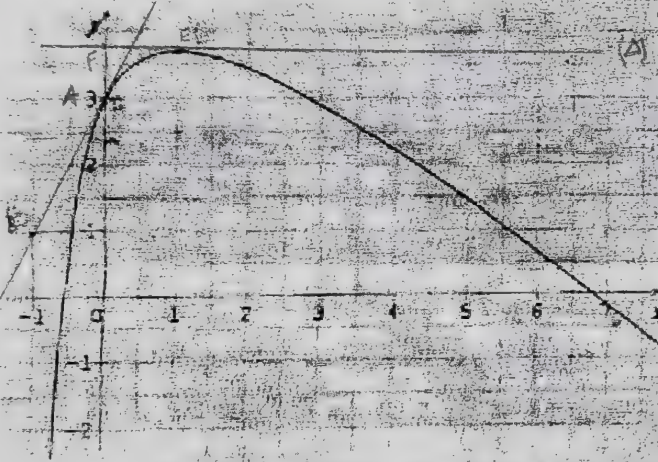
تمارين الرياضيات

الأستاذ: داهش مكي

3 ثانوي

التمرين الثاني:

الجزء 1: لمستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، (C) هو التمثيل البياني لدالة  $f$  معرفة على  $]-1; +\infty[$  تتشمل النقاط  $A(0;3)$ ،  $B(-1;1)$ ،  $E(1;3+\ln 2)$  المستقيم (AB) مماس عند A للمنحني (C)، و D المماس للمنحني (C) عند E.



1. باستعمل المعلومات المتوفرة، عين:

أ- معادلة المستقيم (AB).

ب-  $f(0)$ ،  $f'(0)$ ،  $f(1)$  و  $f'(1)$ .

ج- عند حلول المعادلة  $f(x)=1$ .

د- جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2. نعلم أن الدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$  هي:

$$f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$$

حيث  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان.

احسب  $a$  و  $b$  باستعمال  $f(0)$  و  $f'(1)$ .

الجزء 2: نعلم أن الدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$  هي:  $f(x) = \frac{-x^2 + 4x + 3}{x+1} + \ln(x+1)$

1. عين نهاية  $f$  عند  $-1$ . أعط تفسيراً هندسياً.

$$2. \text{ أ- بين أن } f'(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)^2}$$

ب- لخص إشارة  $f'(x)$ .

ج- مل النتيجة تتوافق مع الجدول الذي أنجزته في السؤال 1.

د- بين أن المعادلة  $f(x)=0$  تقبل حلاً واحداً على  $[0; +\infty[$ . أعط قيمة مقربة إلى  $10^{-3}$  لهذا الحل.

4. أ- احسب مشتقة الدالة  $g$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ:  $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ .

استنتج دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$ .

ب- احسب  $\int_0^1 f(x) dx$ ، أعط تفسيراً هندسياً.



I)  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = e^x + x + 1$

1- أدرس تغيرات الدالة  $g$

2- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-1.28 < \alpha < -1.27$

3- استنتج إشارة  $g(x)$

II)  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = x - (x+2)e^{-x}$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f'(x) = g(x) \times e^{-x}$

2- أدرس تغيرات الدالة  $f$

3- بين أن  $f(\alpha) = \alpha + \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$ ، ثم استنتج حصر العدد  $f(\alpha)$

4- بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف  $\Omega$  يطلب تعيينها.

5- أكتب معادلة للمماس  $(T_1)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $\Omega$ .

6- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب مائل لجوار  $+\infty$

7- بين أنه توجد نقطة وحيدة من المنحنى  $(C_f)$  يكون عندها المماس  $(T_2)$  موازياً للمستقيم المقارب

$(\Delta)$ ، أكتب معادلة  $(T_2)$

8- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\beta$  في المجال  $]-2.5, -2[$

- احسب النهاية  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)$  ثم فسر النتيجة المتحصل عليها.

- أنشئ  $(C_f)$  و  $(T_2)$

7- ناقش بياناً باستخدام المنحنى  $(C_f)$  حسب قيم  $m$  عدد حلول المعادلة:  $(x+2) + me^x = 0$ .



امتحان بكالوريا شعبة علوم تجريبية جوان 2014

التمرين الرابع: ( 06 نقاط )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني  
المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ؛ فسر النتيجةين هندسيا.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته:  $y = 1$ .

(ب) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.

(ج) بيّن أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$ ، حيث  $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$ .

(3) أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$ .

و ليكن  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

(أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم،  $h(x) - h(-x) = 0$ . ماذا تستنتج؟

(ب) أنشئ المنحنى  $(C_h)$  اعتمادا على المنحنى  $(C_f)$ .

(ج) ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $\ln x^2 = (m-1)|x|$ .



## التمرين التاسع :

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  يتمثلها البياني  $(\Gamma)$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما في الشكل المقابل .

- المستقيم  $(d)$  المار بالنقطتين  $O$  و  $A$  والنقطة ذات الإحداثيين  $(1; 5)$  هو مماس لـ  $(\Gamma)$  في  $O$  .  
1. أوجد بياضها  $f(0)$  ;  $f'(0)$  ;  $f'(2)$  .  
2. أوجد الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  حيث

$$f(x) = (ax + b)e^{cx}$$

$$3. \text{ تفرض أن } f(x) = 5x e^{-\frac{x}{2}}$$

أ- أدرس تغيرات الدالة  $f$  و أحسب نهايتها

لعل يزول  $x$  إلى  $+\infty$  ( نقبل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{x}{2}} = 0$  )

ب- شكل جدول تغيرات الدالة  $f$  .

## التمرين العاشر :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$a$  ،  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية . المنحني المقابل

يمثل الدالة  $f$  في مستوى منسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس الوحدة  $1cm$  .

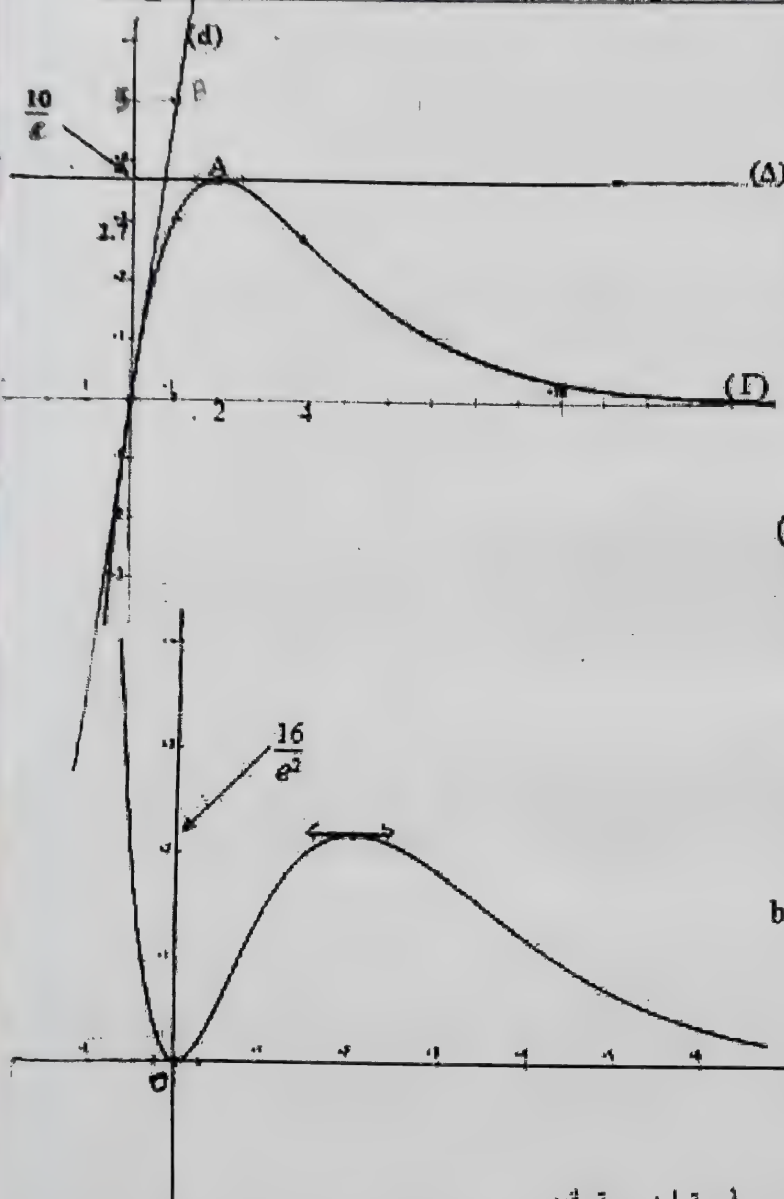
1. شكل من البيان جدول تغيرات الدالة  $f$  .  
2. بإستعمال البيان برر أن  $a = 4$  ،  $b = 0$  و  $c = 0$  .  
3. أدرس تغيرات الدالة  $f$  .

## التمرين الحادي عشر :

$$f(x) = \frac{4e^x - 2}{e^x - 1}$$

لرمز بـ  $(C)$  لمنحنىها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

1. أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(-x) + f(x) = 6$  و إستنتج أن  $(C)$  له مركز تناظر  $A$  يطلب تعيين إحداثياتها .  
ب- عين مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم أحسب النهايات عند حدود هذه المجموعة .  
ج- أحسب  $f'(x)$  و  $f''(x)$  و إستنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و شكل جدول تغيراتها .  
2. أ- بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حل وحيد  $x_0$  أحسب قيمته .  
ب- أكتب معادلة لمماس  $(d)$  للمنحني  $(C)$  عند النقطة ذات الناصلة  $x_0$  .  
ج- نعتبر الدال  $\varphi$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بـ :  $\varphi(x) = f(x) + (4x + 4\ln 2)$  .  
- بين أن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $\varphi'(x) = \frac{2(2e^{2x} - 5e^x + 2)}{(e^x - 1)^2}$  و أدرس إشارة  $\varphi(x)$  حسب قيم  $x$  .  
- إستنتج وضعية المنحني  $(C)$  بالنسبة إلى  $(d)$  .  
- أرسم في المعلم المنحني  $(C)$  و  $(d)$  .





ثانوية الشهيد نور الدين زرواق  
( عين الذهب المدية )  
السنة : الثالثة ثانوي  
شعبة : علوم تجريبية

اختبار الفصل الثاني  
في مادة الرياضيات

تاريخ الإيجار 25 / 02 / 2015  
المدة الرمنية : 2 ساعة

التمرين الأول : ( 06 ن )

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

لكن النقاط :  $H(0,1,1); G(0,0,1); F(1,2,1); E(1,1,1); D(1,0,1); C(1,2,0); B(1,1,0); A(1,0,0); k(0,2,0); J(0,1,0); I(0,2,1)$

عين الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة :  $a, b, c$  مع التبرير

السؤال	إجابة a	إجابة b	إجابة c
مرجح الجملة $\{(O,2);(A,1);(C,1)\}$ هو النقطة	k	I	J
الجداء السلمي $\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{FC}$ يساوي	1	-1	-2
التمثيل الوسيطى للمستقيم هو $(kE)$	$\begin{cases} x = t \\ y = 2+t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = 3+4t \\ y = t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1-t \end{cases}$
معادلة المستوي $(GBk)$ هي	$2x + 2y - z - 2 = 0$	$x + y - 3 = 0$	$x + y + 2z = 2$
المسافة بين النقطة C و المستوي $(ADH)$ هي	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$
حجم رباعي الوجوه $HJKB$ هو	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

التمرين الثاني : ( 07 ن )

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  (وحدة الرسم 2cm).

نعتبر النقاط :  $A, B, C$  التي لواحقها :  $z_A = 2, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = 1 - i\sqrt{3}$  على الترتيب .

I - أكتب العددين المركبين  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسى ثم علم النقاط  $A, B, C$ .

(2) عين طبيعة الرباعي  $OBAC$ .

(3) عين و ارسم المجموعة  $(D)$  للنقط  $M$  من المستوي المركب ذات اللاحقة  $z$  بحيث :  $|z| = |z - 2|$ .

II - نرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي المركب ذات اللاحقة  $z$  حيث  $z \neq z_A$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$

$$z' = \frac{-4}{z-2}$$

حيث :

$$z = \frac{-4}{z-2}$$

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  للأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب التالية :

(2) استنتج النقطتين المرفقتين للنقطتين  $B$  و  $C$ .

(3) عين ثم علم النقطة  $G'$  المرفقة للمركز  $G$  مركز مثلث  $OAB$ .

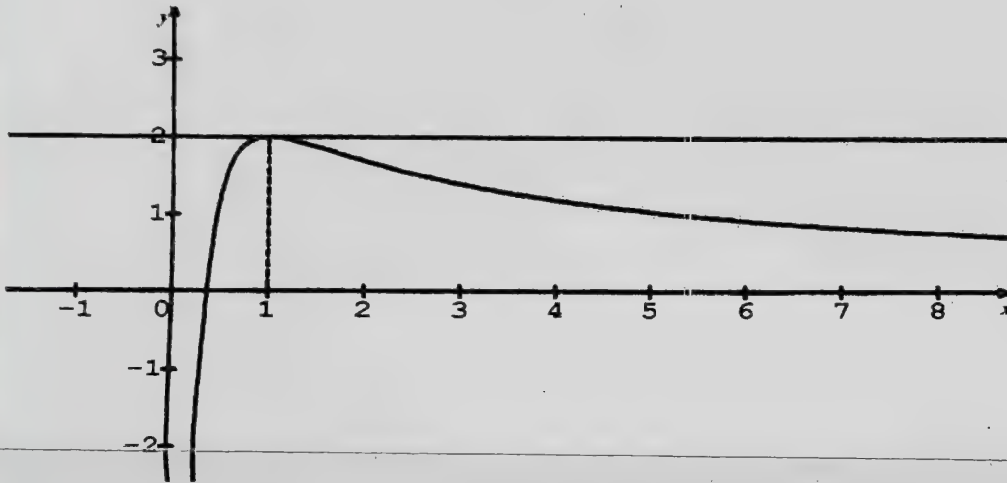


$$|z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

(4) برهن أنه من أجل كل عدد مركب  $z$  حيث  $z \neq 2$  يكون لدينا :

(5) برهن أنه إذا كانت  $M$  نقطة من المجموعة (D) فإن النقطة المرفقة  $M'$  تنتمي إلى الدائرة ( $\Gamma$ ) والتي يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها ثم أرسم هذه الدائرة

التمرين الثالث : ( 07 ن )  
المنحنى (C) المرسوم في الشكل أدناه هو التمثيل البياني للممثل لدالة  $f$  في مستوي منسوب لمعلم متعامد و متجانس  
(0 ; 7 ; 7) حيث  $f$  هي دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال  $]0 ; +\infty[$ .



تعطى المعلومات التالية :

- لتكن النقط التالية A ; B ; C ذات الإحداثيات هي على الترتيب (1, 0) ; (1, 2) ; (0, 2).

- المنحنى (C) يشمل النقطة B و المستقيم (BC) هو مماسا للمنحنى (C) في النقطة B.

- يوجد عددا حقيقيان موجبان تماما  $a$  و  $b$  بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما لدينا :

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}$$

1 - أ) باستعمال الشكل السابق عين  $f(1)$  و  $f'(1)$ .

$$f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$$

ب) بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :

ج) استنتج قيمة كل من العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$ .

2 - أ) بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0 ; +\infty[$  أن إشارة  $f'(x)$  هي نفس إشارة  $(-\ln x)$ .

ب) أحسب النهايتين للدالة  $f$  عند 0 و  $+\infty$  تلميح ( لاحظ أن لكل  $x$  من المجال  $]0 ; +\infty[$   $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$  )

ج) شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3 - أ) برهن أن للمعادلة  $f(x) = 1$  حل وحيد  $\alpha$  في المجال  $]0, 1]$ .

ب) برهن و بطريقة مماثلة أنه يوجد عدد حقيقي وحيد  $\beta$  من المجال  $]1 ; +\infty[$  بحيث  $f(\beta) = 1$ .

4 - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  وجود و عدد حلول المعادلة  $f(x) = f(m)$ .



الاثنين 18 ماي 2015	الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات	ثانوية خديجة بن رويس المديّة
المدة الزمنية 3 ساعات و نصف		شعبة : علوم تجريبية

### الموضوع 01

#### التمرين الأول:

1. أ) حل في  $(C)$  مجموعة الأعداد المركبة المعادلة  $(E): z^2 - 4z + 7 = 0$   
 ب) نرمز إلى حل المعادلة  $(E)$  بـ  $z_1$  و  $z_2$  حيث  $Im(z_1) > 0$ .  
 ج) أثبت أن العدد  $\left(\frac{z_1-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{z_2-1}{2}\right)^{2015}$  حقيقي.  
 د) عني قيم العدد الطبيعي  $n$  حتى يكون العدد  $\left(\frac{z_1-1}{2}\right)^n$  حقيقي.  
 2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط  $A, B, C$  ذات اللواحق  
 $z_C = 5, z_B = 2 - i\sqrt{3}, z_A = 2 + i\sqrt{3}$ .  
 1. نعتبر المجموعة  $(T)$  للنقط  $M(z)$  حيث  $z = 1 + 2e^{i\theta}$  مع  $\theta \in \mathbb{R}$ .  
 أ) تحققي أن النقطتين  $A, B$  تنتميان إلى  $(T)$ .  
 ب) عني المجموعة  $(T)$  ثم أنشئها و أنشئ النقطتين  $A, B$ .  
 2. بيني أنه يوجد تشابه مباشر وحيد  $S$  يحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  و مركزه  $C$ ، يطلب تحديد صيغته المركبة و عناصره المميزة.  
 3. أ) عني  $(T')$  صورة  $(T)$  بالتحويل  $S$ .  
 ب) بيني أن  $(T)$  و  $(T')$  متماسكتان في نقطة يطلب تعيينها.

#### التمرين الثاني:

- لتكن المتتالية  $(u_n)$  من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ  $u_1 = -2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير  
 $u_{n+1} = \frac{3(n+1)u_n - (8n+12)}{n}$  معدوم.  
 1. أ) برهني بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم  $u_n < 0$ .  
 ب) أثبتني أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.  
 2. نرمز بـ  $(v_n)$  إلى المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بـ  $v_n = \frac{-u_n+4}{n}$ .  
 أ) برهني أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.  
 ب) اكتبي عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتجي عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  و احسبي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .  
 ج) احسبي المجموعين  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  ثم  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{3^n} = \frac{v_1}{3} + \frac{v_2}{9} + \dots + \frac{v_n}{3^n} + \dots$ .  
 3. نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$   $\omega_n = \ln(v_n)$ .  
 - احسبي بدلالة  $n$  المجموع  $T_n = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n$ .

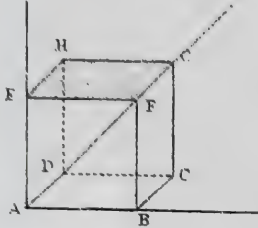


### التمرين الثالث:

نعتبر في الفضاء المكعب  $ABCDEFGH$  ، لزود الفضاء بالمعلم  $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$  ، ولتكن  $I$  منتصف  $EF$  و  $J$  نظيرة  $E$  بالنسبة إلى  $F$  .

1.

- عيني إحداثيتي كل من النقطتين  $I$  و  $J$  .
- بيني أن الشعاع  $DJ$  عمودي على المستوي  $(BGI)$  .
- استنتجي معادلة ديكرتية للمستوي  $(BGI)$  .
- احسبي المسافة بين  $E$  والمستوي  $(BGI)$  .



2. ليكن  $(\Delta)$  المستقيم الذي يشمل  $F$  وعمودي على المستوي  $(BGI)$  .

- عيني تمثيلا وسيطيا لـ:  $(\Delta)$  وتحققي أن  $(\Delta)$  يمر من مركز ثقل المربع

$ADHE$

- عيني إحداثيتي النقطة  $L$  نقطة تقاطع  $(\Delta)$  والمستوي  $(BGI)$  .
- هل النقطة  $L$  هي مركز ثقل المثلث  $BGI$  ؟

### التمرين الرابع :

1. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $g(x) = 4x^{2x} + 1$  .

1. ادرسي اتجاه تغيرات الدالة  $g$  .

2. استنتجي أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $g(x) > 0$  .

II. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $f(x) = x + (2x - 1)e^{2x}$  و  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة

$f$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ، وحدة الطول  $(2 \text{ cm})$  .

- احسبي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و استنتجي أن  $(C_f)$  يقبل مستقيم مقارب مائل  $(D)$  يطلب تعيين معادلته .

ب) ادرسي الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(D)$  .

2. أ) تحققي أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = g(x)$  ثم استنتجي اتجاه تغيرات الدالة  $f$  .

ب) احسبي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم شكلي جدول تغيرات الدالة  $f$  .

ج) بيني أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها  $\alpha$  تحقق  $0,40 < \alpha < 0,41$  .

3. اكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. ارسمي المماس  $(\Delta)$  ،  $(D)$  والمنحنى  $(C_f)$  .

5.  $m$  وسيط حقيقي و  $h_m$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $h_m(x) = (x - 1)e^{2x} - mx$  .

أ) برهني أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يكون لدينا  $h'_m(x) = f(x) - (x + m)$  .

ب) ناقشي بياننا و حسب قيم الوسيط  $m$  عدد القيم الحدية للدالة  $h_m$  .

III. أ)  $\lambda$  عدد حقيقي سالب تماما ، باستعمال المكاملة بالتجزئة احسبي :  $\int_{\lambda}^0 (2x + 1)e^{2x} dx$  .

ب) احسبي المساحة  $S(\lambda)$  للحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  والمستقيمتين التي سعادلاتها

$x = \lambda$  و  $x = 0$  ،  $y = 0$  .

ج) احسبي  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$  .



التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2011

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها على

لترتيب:  $z_A = -1$  ،  $z_B = 2+3i$  و  $z_C = -4+i$

1. أ. اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ .

ب. عين مؤلفة لعدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  وعدة له ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

2. نعتبر التحويل الخطي  $T$  في المستوى الذي يرفق بكل نقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  ، النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:

$z' = (z - 1) \cdot i$

أ. عين طبيعة التحويل  $T$  مستندا عناصره المميزة.

ب. ما هي صورة النقطة  $B$  بالتحويل  $T$ .

3. لتكن  $D$  نقطة ذات اللاحقة  $6+2i$  و  $z_D =$

أ. بين أن النقاط  $A$  ،  $C$  و  $D$  في استقامة.

ب. عين نسبة التشابه  $k$  الذي مركزه  $A$  ويحول النقطة  $C$  إلى النقطة  $D$ .

ج. عين العناصر المميزة للتشابه  $S$  الذي مركزه  $A$  ويحول  $B$  إلى  $D$

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2010

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحتقتهما على لترتيب:  $z_A = 1+i$  و  $z_B = 3i$

1. اكتب على الشكل الأسّي:  $z_B$  و  $z_A$ .

2. ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة  $M$  لاحتقتها  $z$  بالنقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث:

$z' = 2iz + 6+3i$

1. عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$ .

2. عين  $z_C$  للاحقة النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالتشابه المباشر  $S$ .

3. استنتج طبيعة المثلث  $ABC$ .

4. لتكن النقطة  $D$  مرجح الجملة  $\{(A;2), (B;-2), (C;2)\}$ .

أ. عين  $z_D$  للاحقة النقطة  $D$ .

ب. عين مع التبرير طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

4. لتكن  $M$  نقطة من المستوى تختلف عن  $B$  وعن  $D$  لاحتقتها  $z$  ولتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقاط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  التي يكون من أجلها

$\frac{z_B - z}{z_D - z}$  عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ. تحقق أن النقطة  $E$  ذات اللاحقة  $z_E = 6+3i$  تنتمي إلى  $(\Delta)$ .

ب. أعط تفسيراً هندسياً لعدد المركب  $\frac{z_B - z}{z_D - z}$  عين حينئذ المجموعة  $(\Delta)$ .

التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2009

$P(Z)$  كثير حدود حيث:  $P(Z) = (Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$  و  $Z$  عدد مركب

1. حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(Z) = 0$ .

2. نضع:  $z_1 = 1+i$  و  $z_2 = 1-\sqrt{3}i$

أ. اكتب  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.

ب. اكتب  $\frac{z_1}{z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج. استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3. أ.  $n$  عدد طبيعي. عين قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$  حقيقيا.

ب. احسب قيمة العدد  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{451}$ .

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2008

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$z^2 - (1+2i)z - 1+i = 0$

نرمز للحلين  $z_1$  و  $z_2$  حيث:  $|z_1| < |z_2|$

بين أن  $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$  عدد حقيقي.

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، لتكن  $A$  و  $B$  نقط المستوي التي لاحتقاتها على

لترتيب:  $z_1 = 1+i$  و  $z_2 = 2+3i$ .

ليكن  $Z$  العدد المركب حيث:

$Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$

أ. انطلاقا من التعريف  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$  ومن الخاصية:  $e^{i\alpha} \times e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

برهن أن:  $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$  وأن  $e^{i\theta} = e^{i(\theta-2\pi)}$  حيث  $\theta$  و  $\theta_1$  و  $\theta_2$  أعداد حقيقية.

ب. اكتب  $Z$  على الشكل الأسّي.

ج. اكتب  $Z$  على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $B$  بتشابه مباشر مركزه  $A$  ، يطلب تحيين زاويته ونسبته.

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2011

نعتبر في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحتقاتها على لترتيب

$z_1 = 3-2i$  ،  $z_2 = 3+2i$  و  $z_3 = 4+i$

1. أ. علم النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$ .

ب. ما طبيعة الرباعي  $OABC$  على إحداثك.

ج. عين لاحقة النقطة  $\Omega$  مركز الرباعي  $OABC$ .

2. عين ثم أفسر  $(E)$  مجموعة النقاط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 12$

3. أ. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية:  $z^2 - 6z + 13 = 0$

لسمي  $z_1$  و  $z_2$  حلي هذه المعادلة.

ب. لتكن  $M$  نقطة من المستوى لاحتقتها العدد المركب  $z$ .

عين مجموعة النقاط  $M$  من المستوى التي تحقق:  $|z - z_1| = |z - z_2|$

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2010

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 6z + 18 = 0$  ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسّي.

2. في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ، نعتبر النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  و  $D$  لاحتقاتها على لترتيب:  $z_A = 3+3i$  ،  $z_B = z_A$  ،  $z_C = -z_A$  و  $z_D = -z_B$

أ. بين أن النقاط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$  تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز  $O$  مبدأ المعلم.

ب. عين زاوية الدوران  $R$  الذي مركزه  $O$  ويحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$ .

ج. بين أن النقاط  $A$  ،  $O$  و  $C$  في استقامة وكذلك النقاط  $B$  ،  $O$  و  $D$ .

د. استنتج طبيعة الرباعي  $ABCD$ .



التمرين الاول :

اختاري الاجابة الصحيحة مع التبرير:

$$(1) \text{ العدد المركب } (1+i)^{10} + (1-i)^{10} \text{ يساوي } 64, 2^{10}, -64, 0, 64i$$

$$(2) \text{ لتكن المعادلة: } e^x - e^{-x} = 2$$

$$\{\ln(1+\sqrt{2}), \ln(1-\sqrt{2})\}, \{\ln|1+\sqrt{2}|, \ln|1-\sqrt{2}|\}, \{\ln(1+\sqrt{2})\}, \{\ln(\frac{2+\sqrt{8}}{4})\}$$

$$(3) \text{ في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ ليكن } (P) \text{ ذو المعادلة } 2x + 2y - z + 1 = 0 \text{ والنقطة } A(2, 2, 1)$$

المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستوي  $(P)$  هي النقطة  $B$  التي احداثياتها:

$$(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2})$$

$$(-1, -1, -3)$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$$

$$(\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{17}{9})$$

التمرين الثاني :

$$z^3 + (-2 + \sqrt{2})z^2 + 2(1 - \sqrt{2})z + 2\sqrt{2} = 0 \dots (E) \text{ نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة } C \text{ المعادلة:}$$

$$(1) \text{ ا) بيني ان } (-\sqrt{2}) \text{ هو حل للمعادلة } (E) \text{ ثم عيني الاعداد الحقيقية } c, b, a \text{ بحيث من اجل كل عدد مركب } z:$$

ب) احني في  $C$  المعادلة  $(E)$ 

ج) اكتهي الحلول على الشكل الاسي

$$(2) \text{ المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس } (0, \vec{i}, \vec{j})$$

$$\text{النقط } A, B, C \text{ صور الاعداد المركبة } z_A = -\sqrt{2}, z_B = 1+i, z_C = 1-i$$

ا) علمي النقط  $A, B, C$ 

$$\text{ب) بيني انه اذا كانت النقطة } M' \text{ ذات اللاحقة } z' \text{ صورة النقطة } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ بالدوران الذي مركزه } O \text{ وزاويته } \theta \text{ فان } z' = e^{i\theta} z$$

$$\text{ج) بيني ان } A \text{ هي صورة النقطة } B \text{ بالدوران } R \text{ الذي مركزه } O \text{ وزاويته } \theta \text{ يطلب تعيينها}$$

$$\text{د) بيني ان } C \text{ هي صورة } A \text{ بالدوران } R$$

$$(3) \text{ نضع } l = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$$

$$\text{ا) بيني ان: } l = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} (1+i) \text{ ثم استنتجي طويلته و عمدته}$$

$$\text{ب) استنتجي قياس للزاوية } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

$$\text{ج) بيني ان } \frac{\pi}{8} \text{ هي قياس للزاوية } (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$$

$$\text{د) عيني الشكل الجبري ثم المثلثي للعدد } \frac{z_A - z_B}{z_A}$$

$$\text{استنتجي } \sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{\pi}{8}$$



### التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر النقط

$$D(-6, 2, 4) \quad C(0, 1, 2) \quad B(-1, -1, 0) \quad A(3, -2, -1)$$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$

2) حدد الوضعية النسبية للمستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$

3) احسب المسافة بين النقطة  $D$  والمستقيم  $(AB)$

4) احسب اقصر مسافة بين نقط المستقيم  $(AB)$  و  $(CD)$

5) اوجد معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  الذي يحوي  $(AB)$  و يوازي  $(CD)$

6) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة  $(S)$  التي مركزها  $D$  و تمس المستوي  $(P)$  و عيني احداثيات نقطة التماس

### التمرين الرابع :

الجزء الاول : نعتبر الدالتين  $g$  و  $h$  المعرفتين على  $]0, +\infty[$  كما يلي :

$$h(x) = x + (x - 2) \ln x \quad \text{و} \quad g(x) = x - 1 - \ln x$$

1) احسب النهايات عند الاطراف المفتوحة لمجموعة التعريف  $g$

ب) ادرسي اتجاه تغير الدالة  $g$  و شكلي جدول التغيرات

ج) استنتجي إشارة  $g(x)$

2) ابيني انه من اجل كل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  :  $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1) \ln x$

ب) ابيني انه من اجل كل  $x$  من المجال  $]0, +\infty[$  :  $(x - 1) \ln x \geq 0$

ج) استنتجي إشارة  $h(x)$

### الجزء الثاني :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]0, +\infty[$  ب :  $f(x) = 1 + x \ln x - (\ln x)^2$

ليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد و متجانس

1) احسب  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  فصري النتيجة هندسيا

ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) ابيني انه من اجل عدد حقيقي  $x > 0$  :  $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

ب) استنتجي اتجاه تغير الدالة  $f$

3) ليكن  $(\Delta)$  المماس للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة  $A(1, 1)$

ا) عيني معادلة  $(\Delta)$

ب) تحققي انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما :  $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

ج) ادرسي إشارة  $f(x) - x$  ثم استنتجي الوضعية النسبية للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  د) انشئي  $(\Delta)$  و  $(C_f)$



	الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
السنة الدراسية 2015/2014	ثا/محمود باشن قطيطن
القسم: 3 ع 2	الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

### التمرين الأول :

$(U_n)$  متتالية عددية هندسية حدودها موجبة حيث من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$\begin{cases} \ln U_1 + \ln U_5 = -12 \\ \ln U_2 - \ln U_4 = 4 \end{cases}$$

1 - عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول .

2 - أحسب  $U_n$  بدلالة  $n$ .

3 - أحسب المجموع :  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$  ، ثم نهاية  $S$  .

$(V_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :  $V_n = \ln U_n + \ln U_{n+1}$  .

4 - بين ان المتتالية  $(V_n)$  متتالية حسابية يطلب أساسها .

5 - أحسب المجموع :  $S' = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  ، عين العدد الطبيعي  $n$  حتي يكون .

$$S' = 2^{30}$$

### التمرين الثاني :

في المستوي المنسوب الي معلم متعامد و متجانس نعتبر النقاط  $B$  و  $C$  و صور الأعداد المركبة :

$$Z_C = \sqrt{3} - i \quad Z_B = -\sqrt{3} + i \quad , \quad Z_A = -2i$$

1 - أكتب كل من  $Z_B$  ،  $Z_A$  و  $Z_C$  علي الشكل الأسّي .

2 - استنتج مركز الدائرة  $(C)$  التي تشمل النقاط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

3 - علم النقاط  $A$  ،  $B$  ، و  $C$  ثم أرسم الدائرة  $(C)$  .

4 - أكتب العدد  $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$  علي الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

5 - ليكن الدوران  $r$  الذي مركزه  $A$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$  .

أ - بين ان النقطة  $O'$  ذات اللاحقة  $-\sqrt{3} - i$  صورة النقطة  $O$  بالدوران  $r$  .

ب - بين أن  $[O'C]$  قطرا للدائرة  $(C)$  ثم أنشئ  $(C')$  صورة الدائرة  $(C)$  بالدوران  $r$  .

ج - تحقق ان الدائرتين  $(C)$  و  $(C')$  تشتركان في النقطتين  $A$  و  $B$  .



### التمرين الثالث:

منسوب الي معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نعتبر النقط :  $A(1,0,-2)$

$B(3,1,0)$  و  $C(1,0,1)$

1 - أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A و تشمل النقطة B

2 - لتكن  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M(x,y,z)$  من الفضاء بحيث :  $\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

بين ان  $(\Delta)$  مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  و يشمل B .

3 - اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يعامد المستقيم  $(\Delta)$  .

4 - أ - عين أحداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم  $(\Delta)$  .

ب - أحسب بعد النقطة A عن المستقيم  $(\Delta)$  ثم استنتج ان  $(\Delta)$  يقطع الكرة (S) في نقطتين .

5 - t عدد حقيقي و G مرجح الجملة  $\{(C, 1), (B, e^t)\}$  أ - بين ان  $BG = \frac{1}{1+e^t}BC$

ب - شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة علي R حيث :  $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$

ج - استنتج ان مجموعة النقط G عندما يتغير t في R هي القطعة [BC] .

### التمرين الرابع:

لتكن g الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة  $R^* \rightarrow$  :  $g(x) = 2x^3 - 3 + 6\ln|x|$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - بين ان المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  يحقق :  $1.07 < \alpha < 1.09$

لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة  $R^* \rightarrow$  :  $f(x) = 2x = 3 \frac{\ln|x|}{x^2}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم  $(O; i; j)$  حيث :  $\|\vec{i}\| = 2cm$   $\|\vec{j}\| = 1cm$

1- بين ان  $f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$  : ثم ادرس تغيرات الدالة f .

2- بين ان :  $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$  ثم استنتج حضرا 1  $f(\alpha)$  .

3- بين ان المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته :  $y = 2x$  مقارب مائل للمنحني  $(C_f)$  ثم ادرس الوضعية

بين  $(C_f)$   $(\Delta)$

4- بين انه يوجد مماس (T) لـ  $(C_f)$  يوازي  $(\Delta)$  و يمس  $(C_f)$  في نقطتين يطلب تعيين معادلة

لهذا المماس

5- انشئ المنحني  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  .

6- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة :  $mx^2 + 3\ln|x| = 0$

7- لتكن الدالة h المعرفة علي  $R^* \rightarrow$  :  $h(x) = \frac{a+b\ln|x|}{x}$

أ - عين العددين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة  $\ln|x|/x^2 \rightarrow x$  علي  $R^*$  .

ب - استنتج دالة أصلية للدالة f علي  $R^*$  .



التمرين الثالث دورة 2009 99

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر النقط  $A(1;0;2)$ ،  $B(0;2;1)$ ،  $C(2;3;3)$

1/  $(P)$  مستو معادلته من الشكل:  $x-z+1=0$

أ/ بين أن المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$ .

ب/ ما طبيعة المثلث  $ABC$ .

2/ أ/ تحقق أن النقط  $D(2;3;4)$  لا تنتمي إلى  $(ABC)$ .

ب/ ما طبيعة  $ABCD$ .

3/ أ/ احسب المسافة بين  $D$  والمستوي  $(ABC)$ .

ب/ احسب حجم  $ABCD$ .

التمرين الثاني دورة جوان 2008

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط.  
عن الجواب الصحيح معطى الاختيار له.

نعتبر الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $x-3z-4=0$  والنقط

$A(1;3;-1)$  و  $B(4;1;0)$  و  $C(-2;0;-2)$  و  $D(3;2;1)$ .

1/ المستوي  $(P)$  هو:

ج1  $(BCD)$  ج2  $(ABC)$  ج3  $(ACD)$

2/ شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$  هو:

ج1  $\vec{n}_1(1;2;1)$  ج2  $\vec{n}_2(-2;0;0)$  ج3  $\vec{n}_3(2;0;-1)$

3/ المسافة بين النقط  $D$  والمستوي  $(P)$  هي:

ج1  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  ج2  $\frac{\sqrt{10}}{10}$  ج3  $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين الأول دورة جوان 2008

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $x+2y-z+7=0$  والنقط

$A(2;0;1)$  و  $B(3;2;0)$  و  $C(-1;-2;2)$ .

1/ تحقق أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست على استقامة ثم بين أن

المعادلة التكرارية للمستوي  $(ABC)$  هي:  $y+2z-2=0$ .

2/ أ/ تحقق أن المستويين  $(P)$  و  $(ABC)$  متعامدان ثم عين تمثيلا

وسطيا للمستقيم  $(A)$  مستقيم تقاطع  $(P)$  و  $(ABC)$ .

ب/ أصب المسافة بين النقط  $A$  والمستقيم  $(A)$ .

3/ نكتب  $G$  مرجع الجمل  $\{(A;1), (B;0), (C;0)\}$  حيث  $\alpha, \beta$

عدنان حقيقيين يحققان:  $1+\alpha+\beta \neq 0$ .

- عين  $\alpha$  حتى تنتمي النقط  $G$  إلى المستقيم  $(A)$ .

التمرين السادس دورة جوان 2010

نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نقاط  $A(1;1;0)$  و  $B(2;1;1)$  و  $C(-1;2;-1)$ .

1/ أ/ بين أن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  ليست في استقامة.

ب/ بين أن المعادلة التكرارية للمستوي  $(ABC)$  هي:

$x+y+z=0$

2/ نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  اللذين معادلتهم على الترتيب:

$(P): x+2y-3z+1=0$  و  $(Q): 2x+y-z-1=0$  والمستقيم

$(D)$  الذي يشمل النقط  $F(0;4;3)$  و  $E(-1;5;3)$  شعاع توجيه له.

أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(D)$ .

ب/ تحقق أن تقاطع المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  هو المستقيم  $(D)$ .

3/ عين تقاطع المستويات الثلاث  $(ABC)$  و  $(P)$  و  $(Q)$ .

التمرين الخامس دورة جوان 2010

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر المستوي  $(P)$  الذي معادلته  $x-2y+z+3=0$ .

1/ نذكر أن محور الفواصل  $(O; \vec{i})$  يمرر بالجملة  $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

- عين إحداثيات  $A$  نقطة تقاطع حامل المحور  $(O; \vec{i})$  مع

المستوي  $(P)$ .

2/  $C$  و  $B$  النقطتان من الفضاء حيث:  $B(0;0;-3)$  و  $C(-1;-4;2)$ .

أ/ تحقق أن النقط  $B$  تنتمي إلى المستوي  $(P)$ .

ب/ احسب الطول  $AB$ .

ج/ احسب المسافة بين النقط  $C$  والمستوي  $(P)$ .

4/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(d)$  المار بالنقط  $C$  والمنودي

على المستوي  $(P)$ .

ب/ تحقق أن النقط  $A$  تنتمي إلى المستقيم  $(d)$ .

ج/ احسب مساحة المثلث  $ABC$ .

التمرين الرابع دورة جوان 2009

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر النقط  $A(2;3;-1)$ ،  $B(1;-2;4)$ ،  $C(3;0;-2)$ ،  $D(1;-1;-2)$ .

ونفكر  $(P)$  المستوي المعروف بمعادلته الديكارية:

$2x-y+2z+1=0$

3/ المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة

من الحالات التالية:

1/ النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  في استقامة.

2/  $(ABD)$  مستو معادلته الديكارية هي:  $25x-6y-z-33=0$

3/ المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$ .

4/ المخطط العمودي للنقط  $B$  على  $(\pi)$  هو النقط  $H(1;1;-1)$ .

التمرين الثامن دورة جوان 2012 114

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نعتبر المستوي  $(P)$  ذا المعادلة:

$14x+16y+13z-47=0$ ، والنقط  $A(1;-2;5)$ ،  $B(2;2;-1)$ ،  $C(-1;3;1)$ .

1/ أ- تحقق أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة.

ب- بين أن المستوي  $(ABC)$  هو  $(P)$ .

2/ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$ .

3/ أ- أكتب معادلة ديكرارية للمستوي المحوري  $(Q)$  للنقط  $[AB]$ .

ب- تحقق أن النقط  $D(-2; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$  تنتمي إلى المستوي  $(Q)$ .

ج- أصب المسافة بين النقط  $D$  والمستقيم  $(AB)$ .

التمرين السابع دورة جوان 2011

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، المستوي  $(\mathcal{P})$  الذي يشمل النقط

$A(1;-2;1)$  و  $B(-2;1;5)$  شعاع ناظمي له، وليكن  $(\mathcal{Q})$  المستوي ذا المعادلة  $x+2y-7=0$ .

1. أكتب معادلة ديكرارية للمستوي  $(\mathcal{P})$ .

2. أ- تحقق أن النقط  $B(-1;4;-1)$  مشتركة بين المستويين  $(\mathcal{P})$  و  $(\mathcal{Q})$ .

ب- بين أن المستويين  $(\mathcal{P})$  و  $(\mathcal{Q})$  متقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3. لكن النقط  $C(5;-2;-1)$

أ- احسب المسافة بين النقط  $C$  والمستوي  $(\mathcal{P})$  ثم المسافة بين النقط  $C$  والمستوي  $(\mathcal{Q})$ .

ب- أثبت أن المستويين  $(\mathcal{P})$  و  $(\mathcal{Q})$  متعامدان.

ج- استنتج المسافة بين النقط  $C$  والمستقيم  $(\Delta)$ .

التمرين التاسع دورة جوان 2012 107

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط  $A(-1;0;1)$ ،

$B(2;1;0)$  و  $C(1;-1;0)$ .

1/ بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  معين مستوى.

2/ بين أن  $2x-y+5z-3=0$  هي معادلة ديكرارية للمستوي  $(ABC)$ .

3/  $D(2;-1;3)$  و  $H(\frac{13}{15}; -\frac{13}{30}; \frac{1}{6})$  نقطتان من الفضاء حيث:

أ- تحقق أن النقط  $D$  لا تنتمي إلى المستوي  $(ABC)$ .

ب- بين أن النقط  $H$  هي المخطط العمودي للنقط  $D$  على المستوي  $(ABC)$ .

ج- استنتج أن المستويين  $(ADH)$  و  $(ABC)$  متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين السابع دورة جوان 2011

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط  $A(0;1;5)$ ،  $B(2;1;7)$ ،  $C(3;-3;6)$ .

1. أ- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(AB)$  الذي يشمل النقط  $A$  و  $B$ .

ب- تحقق أن النقط  $C$  تنتمي إلى المستقيم  $(AB)$ .

ج- بين أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامة.

د- استنتج المسافة بين النقط  $A$  والمستقيم  $(AB)$ .

هـ- استنتج قيمة الحد الحثي  $I$  التي تكون من أجلها المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن.

و- أقرن بين القيمة الصغرى للحد  $I$ ، والمسافة بين النقط  $A$  والمستقيم  $(AB)$ .



<p>التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2013</p> <p>نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس <math>(O, i, j, k)</math> النقط <math>A(2; 1; -1)</math>، <math>B(1; -1; 3)</math>، <math>C(3; 2; 1)</math>، <math>D(7; 3; 0)</math>، ولتكن <math>I</math> منتصف القطعة <math>[AB]</math>.</p> <p>(1) احسب إحداثيات النقطة <math>I</math>.</p> <p>(ب) بين أن: <math>2x + 4y - 8z + 5 = 0</math> معادلة ديكارتية لـ <math>(P)</math> المستوي المحوي لـ <math>[AB]</math>.</p> <p>(2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم <math>(\Delta)</math> الذي يشمل النقط <math>C</math> و <math>A(1; 2; -4)</math> شعاع توجيه له.</p> <p>(3) ا) جد إحداثيات نقطة تقاطع المستوي <math>(P)</math> والمستقيم <math>(\Delta)</math>.</p> <p>ب) بين أن <math>(\Delta)</math> و <math>(AH)</math> من نفس المستوى، ثم استنتج أن المثلث <math>IHC</math> قائم.</p> <p>(4) ا) بين أن المستقيم <math>(ID)</math> عمودي على كل من المستقيم <math>(AB)</math> و <math>(IK)</math>.</p> <p>ب) احسب حجم رباعي الوجوه <math>DIHC</math>.</p>	<p>التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2013</p> <p>نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس <math>(O, i, j, k)</math> النقط <math>A(-1; 1; 3)</math>، <math>B(1; 0; -1)</math>، <math>C(2; -1; 1)</math>، <math>D(2; 0; -1)</math> والمستوي <math>(P)</math> ذا المعادلة: <math>2y + z + 1 = 0</math>.</p> <p>ليكن <math>(\Delta)</math> المستقيم الذي تمثيل وسيطى له: <math display="block">\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}</math> حيث <math>\beta</math> وسيط حقيقي.</p> <p>(1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم <math>(BC)</math>، ثم تحقق أن المستقيم <math>(BC)</math> محتوي في المستوي <math>(P)</math>.</p> <p>(2) بين أن المستقيمين <math>(\Delta)</math> و <math>(BC)</math> ليسا من نفس المستوى.</p> <p>(3) ا) احسب المسافة بين النقطة <math>A</math> والمستوي <math>(P)</math>.</p> <p>ب) بين أن <math>D</math> نقطة من <math>(P)</math>، وأن المثلث <math>BCD</math> قائم.</p> <p>(4) بين أن <math>ABCD</math> رباعي وجوه، ثم احسب حجمه.</p>
<p>التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2014</p> <p>نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس <math>(O, i, j, k)</math> النقط <math>A(1; -1; -2)</math>، <math>B(1; -2; -3)</math>، <math>C(2; 0; 0)</math>.</p> <p>(1) ا) برهن أن <math>B, A</math> و <math>C</math> ليست في استقامة.</p> <p>ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي <math>(ABC)</math>.</p> <p>(ج) تحقق أن <math>x + y - z - 2 = 0</math> هي معادلة ديكارتية للمستوي <math>(ABC)</math>.</p> <p>(2) نعتبر المستويين <math>(P)</math> و <math>(Q)</math> المعرفين بمعادتيهما كما يلي:</p> <p><math>(P): x - y - 2z + 5 = 0</math> و <math>(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0</math>.</p> <p>برهن أن <math>(P)</math> و <math>(Q)</math> يتقاطعان وفق المستقيم <math>(\Delta)</math> ذي التمثيل الوسيطى: <math>(t \in \mathbb{R}): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}</math>.</p> <p>(3) عيّن تقاطع المستويين <math>(ABC)</math> و <math>(P)</math> و <math>(Q)</math>.</p> <p>(4) لتكن <math>M(x; y; z)</math> نقطة من الفضاء. نسمي <math>d(M, (P))</math> المسافة بين <math>M</math> والمستوي <math>(P)</math> و <math>d(M, (Q))</math> المسافة بين <math>M</math> والمستوي <math>(Q)</math>، عيّن المجموعة <math>(\Gamma)</math> للنقط <math>M</math> بحيث:</p> <p><math>\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))</math>.</p>	<p>التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2014</p> <p>نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس <math>(O, i, j, k)</math> النقط <math>A(2; -1; 1)</math>، <math>B(-1; 2; 1)</math>، <math>C(1; -1; 2)</math> و <math>D(1; 1; 1)</math>.</p> <p>(1) ا) تحقق أن النقط <math>A, B</math> و <math>C</math> تعيّن مستويا.</p> <p>ب) بين أن <math>n(1; 1; 1)</math> هو شعاع داخلي للمستوي <math>(ABC)</math>.</p> <p>(ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي <math>(ABC)</math>.</p> <p>(2) لتكن النقطة <math>G</math> مرجح الجملة المثلثة <math>\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}</math>.</p> <p>ا) احسب إحداثيات <math>G</math>.</p> <p>ب) لتكن <math>(\Gamma)</math> مجموعة النقط <math>M</math> من الفضاء التي تحقق: <math>\ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\  = 2\ \overrightarrow{MD}\ </math>.</p> <p>بين أن <math>(\Gamma)</math> هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة <math>[GD]</math>.</p> <p>(ج) أثبت أن معادلة <math>(\Gamma)</math> هي: <math>6x - 4y + 2z + 3 = 0</math>.</p> <p>(3) بين أن المستويين <math>(ABC)</math> و <math>(\Gamma)</math> يتقاطعان وفق مستقيم <math>(\Delta)</math> يطلب تعيين تمثيل وسيطى له.</p>



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية  
ثانوية بن زمرلي خالد بالمذية

إعداد الأستاذ: تشيكو رياض

امتحان تجريبي في الرياضيات

المدة : 03 ساعات و 30 دقيقة

الشعبة : 3 علوم تجريبية

تمرين الأول : 5 ن (116)

معلم للفضاء متعامد ومتجانس نعتبر النقاط :

$$A(2, 1, 3) \quad B(-3, -1, 7) \quad C(3, 2, 4)$$

1- بين أن النقاط A, B, C تعين مستوي

2- ليكن (d) المستقيم الذي تمثله الوسيط :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أ/ بين أن المستقيم (d) يعامد المستوي (ABC)

ب/ أعط معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)

3- لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) والمستوي (ABC)

أ - بين أن H مرجح الحملة المثقلة  $\{(A, -2), (B, -1), (C, 2)\}$

4- عين طبيعة المجموعة  $S_1$  للنقط M حيث  $(-2\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC})(\overline{MB} - \overline{MC}) = 0$

وأذكر عناصرها المميزة ثم أوجد معادلتها

5- عين مجموعة النقط  $S_2$  للنقط M من الفضاء والتي تحقق  $\| -2\overline{MA} - \overline{MB} + 2\overline{MC} \| = \sqrt{29}$

وأذكر عناصرها المميزة ثم أوجد معادلة لها

6- عين طبيعة المجموعة  $S_1 \cap S_2$  وأذكر عناصرها المميزة

7- هل النقطة  $S(-8, 1, 3)$  تنتمي إلى  $S_1 \cap S_2$  ؟

تمرين الثاني : 4 ن

لتكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $n \in \mathbb{N}^*$   $U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

1- برهن بالتراجع أن  $(U_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 3

2- أدرس اتجاه تغير المتتالية مستنتجا أنها متقاربة وأحسب نهايتها

3- لتكن المتتالية المعرفة بـ  $V_n = n(3 - U_n)$

برهن أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية حدد عناصر

4- عبر عن  $(U_n)$  و  $(V_n)$  بدلالة n ثم احسب نهاية  $(U_n)$



### التمرين الثالث :

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E): z^2 - 4z + 16 = 0$ .

(2) نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لاحقتهما  $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$  و  $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ .

- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين  $z_A$  و  $z_B$ .

(3) لتكن  $C$  النقطة ذات اللاحقة  $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$ .

أ- بيّن أن النقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  تنتمي إلى نفس الدائرة  $(c)$  يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب- أنشئ الدائرة  $(c)$  والنقط  $A$ ،  $B$  و  $C$ .

(4) لتكن  $D$  النقطة ذات اللاحقة  $z_D = 4i$ .

- بيّن أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $D$  بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ .

(5) بيّن أن النقطة  $E$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{OB}$  تنتمي إلى الدائرة  $(c)$ .

- علم النقطة  $E$  في الشكل.

### التمرين الرابع :

#### الجزء الأول :

لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$ .

(1) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

(2) بيّن أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $1.31 < \alpha < 1.32$ .

(3) استنتج ، حسب قيم  $x$  ، إشارة  $g(x)$ .

#### الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

(1) أثبت أنه ، من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  ،  $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ .

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

#### الجزء الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، نسمي  $(\Gamma)$  المنحني الممثل للدالة  $\ln$  (الدالة اللوغاريتمية النيبيرية).

لتكن  $A$  النقطة ذات الإحداثيين  $(0; 2)$  و  $M$  نقطة من  $(\Gamma)$  ذات الفاصلة  $x$ .

(1) أثبت أن المسافة  $AM$  تعطى بالعلاقة  $AM = \sqrt{f(x)}$ .

(2) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $h(x) = \sqrt{f(x)}$ .

أ- بيّن أن للدالتين  $f$  و  $h$  نفس اتجاه التغير على المجال  $]0; +\infty[$ .

ب- عيّن إحداثيي النقطة  $P$  من  $(\Gamma)$  بحيث تكون المسافة  $AM$  أصغر ما يمكن.

ج- بيّن أن :  $AP = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$ .

(3) مماس للمنحني  $(\Gamma)$  في النقطة  $P$  . بيّن أن  $(AP)$  عمودي على  $(T)$ .



<p><b>التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2014</b> 174</p> <p>(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة <math>C</math> المعادلة ذات المجهول <math>z</math> حيث:  <math display="block">(z-i)(z^2-2z+5)=0</math></p> <p>(2) في المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math> (وحدة الطول 1cm)، نعلم النقط <math>A, B, C</math> التي لاحتقاتها: <math>z_A = i</math>، <math>z_B = 1+2i</math> و <math>z_C = 1-2i</math> على الترتيب.</p> <p>(أ) أنشئ النقط <math>A, B, C</math>.</p> <p>(ب) جد <math>z_H</math> لاحتقة النقطه <math>H</math> المسقط العمودي للنقطه <math>A</math> على المستقيم <math>(BC)</math>.</p> <p>(ج) احسب مساحة المثلث <math>ABC</math>.</p> <p>(3) ليكن <math>S</math> التشابه المباشر الذي مركزه <math>A</math> ونسبته <math>\frac{1}{2}</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{2}</math>.</p> <p>(أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه <math>S</math>.</p> <p>(ب) بين أن مساحة صورة المثلث <math>ABC</math> بالتشابه <math>S</math> تساوي <math>\frac{1}{2} \text{ cm}^2</math>.</p> <p>(4) <math>M</math> نقطه لاحتقاتها <math>z</math>، عيّن مجموعة النقط <math>M</math> حيث: <math> z = z+1+2i </math></p>	<p><b>التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2014</b> 103</p> <p>(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة <math>C</math> المعادلة <math>z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0</math>.</p> <p>(2) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math>، لكن النقط <math>A, B, C, D</math> التي لاحتقاتها على الترتيب: <math>z_A = 3\sqrt{2}(1+i)</math>، <math>z_B = \sqrt{2}</math>، <math>z_C = 6\sqrt{2}</math> و <math>z_D = \frac{z_C}{2}</math>.</p> <p>(أ) اكتب <math>z_A, z_B</math> و <math>z_C</math> على الشكل الأسّي.</p> <p>(ب) احسب <math>\left( \frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}</math>.</p> <p>(ج) بين أن النقط <math>O, A, B, C</math> تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها <math>D</math>، يطلب تعيين نصف قطرها.</p> <p>(د) احسب <math>\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}</math> ثم جد قوساً لزاوية <math>(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})</math>. ما هي طبيعة الرباعي <math>OACB</math>؟</p> <p>(3) ليكن <math>R</math> الدوران الذي مركزه <math>O</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{2}</math>.</p> <p>(أ) اكتب العبارة المركبة للدوران <math>R</math>.</p> <p>(ب) عيّن لاحتقة النقطه <math>C'</math> صورة <math>C</math> بالدوران <math>R</math> ثم تحقق أن النقط <math>A, C, C'</math> في استقامة.</p> <p>(ج) عيّن لاحتقة النقطه <math>A'</math> صورة <math>A</math> بالدوران <math>R</math> ثم حدد صورة الرباعي <math>OACB</math> بالدوران <math>R</math>.</p>
<p><b>التمرين الأول الموضوع الثاني دورة جوان 2013</b> 178</p> <p>نعبر في مجموعة الأعداد المركبة <math>C</math> المعادلة (E) ذات المجهول <math>z</math> الآتية: <math>z^2 + 4z + 13 = 0</math> ..... (E)</p> <p>(1) تحقق أن العدد المركب <math>-2-3i</math> حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.</p> <p>(2) <math>A</math> و <math>B</math> نقطتان من المستوى المركب لاحتقاتها <math>z_A = -2-3i</math> و <math>z_B = i</math> على الترتيب. <math>S</math> التشابه المباشر الذي مركزه <math>A</math>، نسبته <math>\frac{1}{2}</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{2}</math> والذي يحول كل نقطه <math>M(z)</math> من المستوى إلى النقطه <math>M'(z')</math>.</p> <p>(أ) بين أن: <math>z' = \frac{1}{2}z - \frac{7}{2} - 2i</math>.</p> <p>(ب) احسب <math>z_C</math> لاحتقة النقطه <math>C</math>، علماً أن <math>C</math> هي صورة <math>B</math> بالتشابه <math>S</math>.</p> <p>(3) لكن النقطه <math>D</math>، حيث: <math>2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}</math>.</p> <p>(أ) بين أن <math>D</math> هي مرجع النقطتين <math>A</math> و <math>B</math> المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.</p> <p>(ب) احسب <math>z_D</math> لاحتقة النقطه <math>D</math>.</p> <p>(ج) بين أن: <math>\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = 1</math>، ثم استنتج طبيعة المثلث <math>ACD</math>.</p>	<p><b>التمرين الثالث الموضوع الأول دورة جوان 2013</b> 172</p> <p>(1) حل في <math>C</math> مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول <math>z</math> التالية:  <math display="block">z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 \text{ ..... (I)}</math></p> <p>(2) من أجل <math>\alpha = \frac{\pi}{3}</math>، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ <math>z_1</math> و <math>z_2</math>. بين أن: <math>\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{2013} = 1</math>.</p> <p>(3) نعتبر في المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math> النقط <math>A, B, C</math> التي لاحتقاتها: <math>z_A = 1+i\sqrt{3}</math>، <math>z_B = 1-i\sqrt{3}</math> و <math>z_C = 4+i\sqrt{3}</math> على الترتيب.</p> <p>(أ) أنشئ النقط <math>A, B, C</math>.</p> <p>(ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب <math>\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}</math>، ثم استنتج أن <math>C</math> هي صورة <math>B</math> بالتشابه المباشر <math>S</math> الذي مركزه <math>A</math> و يطلب تعيين نسبته و زاويته.</p> <p>(ج) عيّن لاحتقة النقطه <math>G</math> مرجح الجملة <math>\{(A;1), (B;-1), (C;2)\}</math>، ثم أنشئ <math>G</math>.</p> <p>(د) احسب <math>z_D</math> لاحتقة النقطه <math>D</math>، بحيث يكون الرباعي <math>ABDC</math> متوازي أضلاع.</p>
<p><b>التمرين الثالث الموضوع الثاني دورة جوان 2012</b></p> <p>(1) <math>P(z)</math> كثير الحدود لمتغير المركب <math>z</math> حيث: <math>P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72</math>.</p> <p>أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود <math>P(z)</math>.</p> <p>ب- جد العددين الحقيقيين <math>\alpha</math> و <math>\beta</math> بحيث من أجل كل عدد مركب <math>z</math>: <math>P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)</math>.</p> <p>ج- حل في مجموعة الأعداد المركبة <math>C</math> المعادلة <math>P(z) = 0</math>.</p> <p>(2) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math>، <math>A, B, C</math> نقط من المستوى المركب لاحتقاتها على الترتيب: <math>z_A = 6</math>، <math>z_B = 3+i\sqrt{3}</math> و <math>z_C = 3-i\sqrt{3}</math>.</p> <p>أ- اكتب كلاً من <math>z_B</math> و <math>z_C</math> على الشكل الأسّي.</p> <p>ب- اكتب عدد المركب <math>\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}</math> على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.</p> <p>ج- استنتج طبيعة المثلث <math>ABC</math>.</p> <p>(3) ليكن <math>S</math> التشابه المباشر الذي مركزه <math>C</math>، نسبته <math>\sqrt{3}</math> وزاويته <math>\frac{\pi}{2}</math>.</p> <p>أ- حد كتابة المركبة للتشابه <math>S</math>.</p> <p>ب- عيّن <math>z_{A'}</math> لاحتقة النقطه <math>A'</math> صورة النقطه <math>A</math> بالتشابه <math>S</math>.</p> <p>ج- بين أن النقط <math>A, B, A'</math> في استقامة.</p>	<p><b>التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2012</b></p> <p>(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة <math>C</math> المعادلة ذات المجهول <math>z</math> التالية:  <math display="block">z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}</math></p> <p>(حيث <math>z \neq 2-3i</math>)</p> <p>- حل في <math>C</math> هذه المعادلة.</p> <p>(2) بنسب المستوى المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس <math>(O; \vec{u}, \vec{v})</math>، <math>A, B</math> نقطتان لاحتقاتهما على الترتيب: <math>z_A = 1+i\sqrt{5}</math> و <math>z_B = 1-i\sqrt{5}</math>.</p> <p>- تحقق أن <math>A</math> و <math>B</math> تنتميان إلى دائرة مركزها <math>O</math> يطلب تعيين نصف قطرها.</p> <p>(3) نرفق بكل نقطه <math>M</math> من المستوى لاحتقاتها <math>z</math>، النقطه <math>M'</math> لاحتقاتها <math>z'</math> حيث <math>z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}</math>.</p> <p>النقط <math>E, D, C</math> لاحتقاتها على الترتيب: <math>z_E = 2-3i</math> و <math>z_D = 3i</math> و <math>z_C = -2i</math> (محور القطعة <math>[CD]</math>).</p> <p>أ- عيّن عن المسافة <math>OM'</math> بدلالة المسافتين <math>DM</math> و <math>CM</math>.</p> <p>ب- استنتج أنه من أجل كل نقطه <math>M</math> من <math>(\Delta)</math> فإن النقطه <math>M'</math> تنتمي إلى دائرة <math>(\gamma)</math> يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن <math>E</math> تنتمي إلى <math>(\gamma)</math>.</p>



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26، المدينة

الهاتف: 05.50.58.85.27

البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



## أكاديمية رواد التائق لخدمات التنمية البشرية والاستشارات

ملخص تمارين متتاليات بكالوريا علمي

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2014

- تكن  $(u_n)$  متتالية العددي المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ ،  $v_n = u_n + 4$ ،  $n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .
- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
  - اكتب كلاً من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$ .
  - ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  على  $\mathbb{N}$ .
  - احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .
  - تكن  $(w_n)$  المتتالية العددي المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$ .
- (أ) بين أن  $(w_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}$ .
- (ب) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$ .

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2014

- (I) نعتبر المتتالية العددي  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  بحدها العام:  $u_n = e^{\frac{1}{2} - n}$  ( $e$  هو أسس اللوغاريتم الطبيعي).
- بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية، بطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
  - احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ماذا تستنتج؟
  - احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .
- (II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $v_n = \ln(u_n)$ ،  $v_n$  يرمز إلى اللوغاريتم الطبيعي.
- عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج نوع المتتالية  $(v_n)$ .
  - (أ) احسب بدلالة  $n$  العدد  $P_n$  حيث:  $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$ .
  - (ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث:  $P_n + 4n > 0$ .

التمرين الثاني الموضوع الأول دورة جوان 2013

- (I) المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$ .
- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية بطلب تحديد أساسها وحدها الأول.
  - احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .
- (II) المتتالية  $(u_n)$  معرفة بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$ .
- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $1 \leq u_n \leq 6$ .
  - ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .
  - (أ) برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$ .
- (ب) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$ . استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2013

- في الشكل المقابل،  $(C_f)$  هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; 1]$  بالعلاقة:  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ .
- (d) المستقيم ذو المعادلة  $y = x$ .
- (I) المتتالية العددي المعرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول،  $u_0 = \frac{1}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود  $u_0$ ،  $u_1$  و  $u_2$  على محور القواسم دون حسابها، مبرزاً خطوط التمثيل.
  - (ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.
  - (2) أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; 1]$ .
  - (ب) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $0 < u_n < 1$ .
  - (ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .
  - (3)  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$  المتتالية العددي المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ .
  - (أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ ، بطلب صواب حدها الأول  $v_0$ .
  - (ب) احسب نهاية  $(u_n)$ .

التمرين الأول الموضوع الثاني دورة جوان 2012

- (I) المتتالية العددي المعرفة بحدها الأول  $u_0 = \frac{13}{4}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$ .
- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $3 < u_n < 4$ .
  - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$ .
  - برزر نماداً  $(u_n)$  متقاربة.
  - (4) المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \ln(u_n - 3)$ .
  - (أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية عددي أساسها  $\frac{1}{2}$ ، ثم احسب حدها الأول.
  - (ب) اكتب كلاً من  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$ ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
  - (ج) نضع عن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$ .
  - اكتب  $P_n$  بدلالة  $n$ ، ثم بين أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{16}$ .

التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2012

- نعتبر المتتالية العددي  $(u_n)$  المعرفة بحدها الأول  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ .
- تكن  $h$  الدالة المعرفة على المجال  $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$  كما يلي:  $h(x) = \sqrt{2x + 3}$ .
  - استفد من معادلة  $y' = x - 3$  في المنحني المرسوم إلى محد متعامد ومماس، (انظر الشكل المقابل).
  - (أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور القواسم الحدود  $u_0$ ،  $u_1$  و  $u_2$ .
  - (ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير  $(u_n)$  وتقاربها.
  - (2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد صحيح  $n$ ،  $0 < u_n < 3$ .
  - (3) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .
  - (ب) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .



التمرين الأول الموضوع الأول دورة جوان 2011 184

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = 1 + u_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .  
 $(v_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $v_0 = 1$  و  $v_{n+1} = \frac{1}{2} + v_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

في كل حالة من الحالات الثلاث التالية اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددوها مع التعليل.

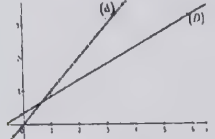
1. المتتالية  $(v_n)$  :  
 أ. حسابية. ب. هندسية. ج. لا حسابية ولا هندسية.
2. نهاية المتتالية  $(u_n)$  هي :  
 أ.  $+\infty$ . ب.  $-\infty$ . ج.  $\frac{1}{2}$ .

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  
 $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$  ، ب.  $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$  ، ج.  $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$  ، د.  $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}$  .

التمرين الأول الموضوع الثاني دورة جوان 2011 السؤال 4

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = 1 + u_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .  
 $(v_n)$  متتالية عددية معرفة بـ  $v_0 = 1$  و  $v_{n+1} = \frac{1}{2} + v_n$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .  
 أ. بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .  
 ب. اكتب بدلالة  $n$  و  $v_0$  عبارة  $v_n$  ثم استنتاج بدلالة  $n$  و  $v_0$  عبارة  $u_n$ .  
 ج. عن قيم العدد الحقيقي  $x$  التي تكون من أجلها المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.  
 2. نضع  $\frac{1}{2}$  :  
 أ. احسب بدلالة  $n$  : المجموع  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$  حيث  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$  ، ب.  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$  ، ج.  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$  ، د.  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$  .

التمرين الثاني الموضوع الثاني دورة جوان 2010



لي المستوي المار بـ  $O$  معلم متعامد ومتجانس  $\Delta$  المستقيمين  $(D)$  و  $(D')$  متانليهما على الترتيب :  
 $y = \frac{1}{2}x + 1$  و  $y = x$  .  
 1. لكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  :  $u_0 = 6$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .  
 أ. اقل الشكل ثم مقل على محور الفواصل الحدود التالية :  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$  و  $u_5$  و  $u_6$  و  $u_7$  و  $u_8$  و  $u_9$  و  $u_{10}$  و  $u_{11}$  و  $u_{12}$  و  $u_{13}$  و  $u_{14}$  و  $u_{15}$  و  $u_{16}$  و  $u_{17}$  و  $u_{18}$  و  $u_{19}$  و  $u_{20}$  و  $u_{21}$  و  $u_{22}$  و  $u_{23}$  و  $u_{24}$  و  $u_{25}$  و  $u_{26}$  و  $u_{27}$  و  $u_{28}$  و  $u_{29}$  و  $u_{30}$  و  $u_{31}$  و  $u_{32}$  و  $u_{33}$  و  $u_{34}$  و  $u_{35}$  و  $u_{36}$  و  $u_{37}$  و  $u_{38}$  و  $u_{39}$  و  $u_{40}$  و  $u_{41}$  و  $u_{42}$  و  $u_{43}$  و  $u_{44}$  و  $u_{45}$  و  $u_{46}$  و  $u_{47}$  و  $u_{48}$  و  $u_{49}$  و  $u_{50}$  و  $u_{51}$  و  $u_{52}$  و  $u_{53}$  و  $u_{54}$  و  $u_{55}$  و  $u_{56}$  و  $u_{57}$  و  $u_{58}$  و  $u_{59}$  و  $u_{60}$  و  $u_{61}$  و  $u_{62}$  و  $u_{63}$  و  $u_{64}$  و  $u_{65}$  و  $u_{66}$  و  $u_{67}$  و  $u_{68}$  و  $u_{69}$  و  $u_{70}$  و  $u_{71}$  و  $u_{72}$  و  $u_{73}$  و  $u_{74}$  و  $u_{75}$  و  $u_{76}$  و  $u_{77}$  و  $u_{78}$  و  $u_{79}$  و  $u_{80}$  و  $u_{81}$  و  $u_{82}$  و  $u_{83}$  و  $u_{84}$  و  $u_{85}$  و  $u_{86}$  و  $u_{87}$  و  $u_{88}$  و  $u_{89}$  و  $u_{90}$  و  $u_{91}$  و  $u_{92}$  و  $u_{93}$  و  $u_{94}$  و  $u_{95}$  و  $u_{96}$  و  $u_{97}$  و  $u_{98}$  و  $u_{99}$  و  $u_{100}$  و  $u_{101}$  و  $u_{102}$  و  $u_{103}$  و  $u_{104}$  و  $u_{105}$  و  $u_{106}$  و  $u_{107}$  و  $u_{108}$  و  $u_{109}$  و  $u_{110}$  و  $u_{111}$  و  $u_{112}$  و  $u_{113}$  و  $u_{114}$  و  $u_{115}$  و  $u_{116}$  و  $u_{117}$  و  $u_{118}$  و  $u_{119}$  و  $u_{120}$  و  $u_{121}$  و  $u_{122}$  و  $u_{123}$  و  $u_{124}$  و  $u_{125}$  و  $u_{126}$  و  $u_{127}$  و  $u_{128}$  و  $u_{129}$  و  $u_{130}$  و  $u_{131}$  و  $u_{132}$  و  $u_{133}$  و  $u_{134}$  و  $u_{135}$  و  $u_{136}$  و  $u_{137}$  و  $u_{138}$  و  $u_{139}$  و  $u_{140}$  و  $u_{141}$  و  $u_{142}$  و  $u_{143}$  و  $u_{144}$  و  $u_{145}$  و  $u_{146}$  و  $u_{147}$  و  $u_{148}$  و  $u_{149}$  و  $u_{150}$  و  $u_{151}$  و  $u_{152}$  و  $u_{153}$  و  $u_{154}$  و  $u_{155}$  و  $u_{156}$  و  $u_{157}$  و  $u_{158}$  و  $u_{159}$  و  $u_{160}$  و  $u_{161}$  و  $u_{162}$  و  $u_{163}$  و  $u_{164}$  و  $u_{165}$  و  $u_{166}$  و  $u_{167}$  و  $u_{168}$  و  $u_{169}$  و  $u_{170}$  و  $u_{171}$  و  $u_{172}$  و  $u_{173}$  و  $u_{174}$  و  $u_{175}$  و  $u_{176}$  و  $u_{177}$  و  $u_{178}$  و  $u_{179}$  و  $u_{180}$  و  $u_{181}$  و  $u_{182}$  و  $u_{183}$  و  $u_{184}$  و  $u_{185}$  و  $u_{186}$  و  $u_{187}$  و  $u_{188}$  و  $u_{189}$  و  $u_{190}$  و  $u_{191}$  و  $u_{192}$  و  $u_{193}$  و  $u_{194}$  و  $u_{195}$  و  $u_{196}$  و  $u_{197}$  و  $u_{198}$  و  $u_{199}$  و  $u_{200}$  و  $u_{201}$  و  $u_{202}$  و  $u_{203}$  و  $u_{204}$  و  $u_{205}$  و  $u_{206}$  و  $u_{207}$  و  $u_{208}$  و  $u_{209}$  و  $u_{210}$  و  $u_{211}$  و  $u_{212}$  و  $u_{213}$  و  $u_{214}$  و  $u_{215}$  و  $u_{216}$  و  $u_{217}$  و  $u_{218}$  و  $u_{219}$  و  $u_{220}$  و  $u_{221}$  و  $u_{222}$  و  $u_{223}$  و  $u_{224}$  و  $u_{225}$  و  $u_{226}$  و  $u_{227}$  و  $u_{228}$  و  $u_{229}$  و  $u_{230}$  و  $u_{231}$  و  $u_{232}$  و  $u_{233}$  و  $u_{234}$  و  $u_{235}$  و  $u_{236}$  و  $u_{237}$  و  $u_{238}$  و  $u_{239}$  و  $u_{240}$  و  $u_{241}$  و  $u_{242}$  و  $u_{243}$  و  $u_{244}$  و  $u_{245}$  و  $u_{246}$  و  $u_{247}$  و  $u_{248}$  و  $u_{249}$  و  $u_{250}$  و  $u_{251}$  و  $u_{252}$  و  $u_{253}$  و  $u_{254}$  و  $u_{255}$  و  $u_{256}$  و  $u_{257}$  و  $u_{258}$  و  $u_{259}$  و  $u_{260}$  و  $u_{261}$  و  $u_{262}$  و  $u_{263}$  و  $u_{264}$  و  $u_{265}$  و  $u_{266}$  و  $u_{267}$  و  $u_{268}$  و  $u_{269}$  و  $u_{270}$  و  $u_{271}$  و  $u_{272}$  و  $u_{273}$  و  $u_{274}$  و  $u_{275}$  و  $u_{276}$  و  $u_{277}$  و  $u_{278}$  و  $u_{279}$  و  $u_{280}$  و  $u_{281}$  و  $u_{282}$  و  $u_{283}$  و  $u_{284}$  و  $u_{285}$  و  $u_{286}$  و  $u_{287}$  و  $u_{288}$  و  $u_{289}$  و  $u_{290}$  و  $u_{291}$  و  $u_{292}$  و  $u_{293}$  و  $u_{294}$  و  $u_{295}$  و  $u_{296}$  و  $u_{297}$  و  $u_{298}$  و  $u_{299}$  و  $u_{300}$  و  $u_{301}$  و  $u_{302}$  و  $u_{303}$  و  $u_{304}$  و  $u_{305}$  و  $u_{306}$  و  $u_{307}$  و  $u_{308}$  و  $u_{309}$  و  $u_{310}$  و  $u_{311}$  و  $u_{312}$  و  $u_{313}$  و  $u_{314}$  و  $u_{315}$  و  $u_{316}$  و  $u_{317}$  و  $u_{318}$  و  $u_{319}$  و  $u_{320}$  و  $u_{321}$  و  $u_{322}$  و  $u_{323}$  و  $u_{324}$  و  $u_{325}$  و  $u_{326}$  و  $u_{327}$  و  $u_{328}$  و  $u_{329}$  و  $u_{330}$  و  $u_{331}$  و  $u_{332}$  و  $u_{333}$  و  $u_{334}$  و  $u_{335}$  و  $u_{336}$  و  $u_{337}$  و  $u_{338}$  و  $u_{339}$  و  $u_{340}$  و  $u_{341}$  و  $u_{342}$  و  $u_{343}$  و  $u_{344}$  و  $u_{345}$  و  $u_{346}$  و  $u_{347}$  و  $u_{348}$  و  $u_{349}$  و  $u_{350}$  و  $u_{351}$  و  $u_{352}$  و  $u_{353}$  و  $u_{354}$  و  $u_{355}$  و  $u_{356}$  و  $u_{357}$  و  $u_{358}$  و  $u_{359}$  و  $u_{360}$  و  $u_{361}$  و  $u_{362}$  و  $u_{363}$  و  $u_{364}$  و  $u_{365}$  و  $u_{366}$  و  $u_{367}$  و  $u_{368}$  و  $u_{369}$  و  $u_{370}$  و  $u_{371}$  و  $u_{372}$  و  $u_{373}$  و  $u_{374}$  و  $u_{375}$  و  $u_{376}$  و  $u_{377}$  و  $u_{378}$  و  $u_{379}$  و  $u_{380}$  و  $u_{381}$  و  $u_{382}$  و  $u_{383}$  و  $u_{384}$  و  $u_{385}$  و  $u_{386}$  و  $u_{387}$  و  $u_{388}$  و  $u_{389}$  و  $u_{390}$  و  $u_{391}$  و  $u_{392}$  و  $u_{393}$  و  $u_{394}$  و  $u_{395}$  و  $u_{396}$  و  $u_{397}$  و  $u_{398}$  و  $u_{399}$  و  $u_{400}$  و  $u_{401}$  و  $u_{402}$  و  $u_{403}$  و  $u_{404}$  و  $u_{405}$  و  $u_{406}$  و  $u_{407}$  و  $u_{408}$  و  $u_{409}$  و  $u_{410}$  و  $u_{411}$  و  $u_{412}$  و  $u_{413}$  و  $u_{414}$  و  $u_{415}$  و  $u_{416}$  و  $u_{417}$  و  $u_{418}$  و  $u_{419}$  و  $u_{420}$  و  $u_{421}$  و  $u_{422}$  و  $u_{423}$  و  $u_{424}$  و  $u_{425}$  و  $u_{426}$  و  $u_{427}$  و  $u_{428}$  و  $u_{429}$  و  $u_{430}$  و  $u_{431}$  و  $u_{432}$  و  $u_{433}$  و  $u_{434}$  و  $u_{435}$  و  $u_{436}$  و  $u_{437}$  و  $u_{438}$  و  $u_{439}$  و  $u_{440}$  و  $u_{441}$  و  $u_{442}$  و  $u_{443}$  و  $u_{444}$  و  $u_{445}$  و  $u_{446}$  و  $u_{447}$  و  $u_{448}$  و  $u_{449}$  و  $u_{450}$  و  $u_{451}$  و  $u_{452}$  و  $u_{453}$  و  $u_{454}$  و  $u_{455}$  و  $u_{456}$  و  $u_{457}$  و  $u_{458}$  و  $u_{459}$  و  $u_{460}$  و  $u_{461}$  و  $u_{462}$  و  $u_{463}$  و  $u_{464}$  و  $u_{465}$  و  $u_{466}$  و  $u_{467}$  و  $u_{468}$  و  $u_{469}$  و  $u_{470}$  و  $u_{471}$  و  $u_{472}$  و  $u_{473}$  و  $u_{474}$  و  $u_{475}$  و  $u_{476}$  و  $u_{477}$  و  $u_{478}$  و  $u_{479}$  و  $u_{480}$  و  $u_{481}$  و  $u_{482}$  و  $u_{483}$  و  $u_{484}$  و  $u_{485}$  و  $u_{486}$  و  $u_{487}$  و  $u_{488}$  و  $u_{489}$  و  $u_{490}$  و  $u_{491}$  و  $u_{492}$  و  $u_{493}$  و  $u_{494}$  و  $u_{495}$  و  $u_{496}$  و  $u_{497}$  و  $u_{498}$  و  $u_{499}$  و  $u_{500}$  و  $u_{501}$  و  $u_{502}$  و  $u_{503}$  و  $u_{504}$  و  $u_{505}$  و  $u_{506}$  و  $u_{507}$  و  $u_{508}$  و  $u_{509}$  و  $u_{510}$  و  $u_{511}$  و  $u_{512}$  و  $u_{513}$  و  $u_{514}$  و  $u_{515}$  و  $u_{516}$  و  $u_{517}$  و  $u_{518}$  و  $u_{519}$  و  $u_{520}$  و  $u_{521}$  و  $u_{522}$  و  $u_{523}$  و  $u_{524}$  و  $u_{525}$  و  $u_{526}$  و  $u_{527}$  و  $u_{528}$  و  $u_{529}$  و  $u_{530}$  و  $u_{531}$  و  $u_{532}$  و  $u_{533}$  و  $u_{534}$  و  $u_{535}$  و  $u_{536}$  و  $u_{537}$  و  $u_{538}$  و  $u_{539}$  و  $u_{540}$  و  $u_{541}$  و  $u_{542}$  و  $u_{543}$  و  $u_{544}$  و  $u_{545}$  و  $u_{546}$  و  $u_{547}$  و  $u_{548}$  و  $u_{549}$  و  $u_{550}$  و  $u_{551}$  و  $u_{552}$  و  $u_{553}$  و  $u_{554}$  و  $u_{555}$  و  $u_{556}$  و  $u_{557}$  و  $u_{558}$  و  $u_{559}$  و  $u_{560}$  و  $u_{561}$  و  $u_{562}$  و  $u_{563}$  و  $u_{564}$  و  $u_{565}$  و  $u_{566}$  و  $u_{567}$  و  $u_{568}$  و  $u_{569}$  و  $u_{570}$  و  $u_{571}$  و  $u_{572}$  و  $u_{573}$  و  $u_{574}$  و  $u_{575}$  و  $u_{576}$  و  $u_{577}$  و  $u_{578}$  و  $u_{579}$  و  $u_{580}$  و  $u_{581}$  و  $u_{582}$  و  $u_{583}$  و  $u_{584}$  و  $u_{585}$  و  $u_{586}$  و  $u_{587}$  و  $u_{588}$  و  $u_{589}$  و  $u_{590}$  و  $u_{591}$  و  $u_{592}$  و  $u_{593}$  و  $u_{594}$  و  $u_{595}$  و  $u_{596}$  و  $u_{597}$  و  $u_{598}$  و  $u_{599}$  و  $u_{600}$  و  $u_{601}$  و  $u_{602}$  و  $u_{603}$  و  $u_{604}$  و  $u_{605}$  و  $u_{606}$  و  $u_{607}$  و  $u_{608}$  و  $u_{609}$  و  $u_{610}$  و  $u_{611}$  و  $u_{612}$  و  $u_{613}$  و  $u_{614}$  و  $u_{615}$  و  $u_{616}$  و  $u_{617}$  و  $u_{618}$  و  $u_{619}$  و  $u_{620}$  و  $u_{621}$  و  $u_{622}$  و  $u_{623}$  و  $u_{624}$  و  $u_{625}$  و  $u_{626}$  و  $u_{627}$  و  $u_{628}$  و  $u_{629}$  و  $u_{630}$  و  $u_{631}$  و  $u_{632}$  و  $u_{633}$  و  $u_{634}$  و  $u_{635}$  و  $u_{636}$  و  $u_{637}$  و  $u_{638}$  و  $u_{639}$  و  $u_{640}$  و  $u_{641}$  و  $u_{642}$  و  $u_{643}$  و  $u_{644}$  و  $u_{645}$  و  $u_{646}$  و  $u_{647}$  و  $u_{648}$  و  $u_{649}$  و  $u_{650}$  و  $u_{651}$  و  $u_{652}$  و  $u_{653}$  و  $u_{654}$  و  $u_{655}$  و  $u_{656}$  و  $u_{657}$  و  $u_{658}$  و  $u_{659}$  و  $u_{660}$  و  $u_{661}$  و  $u_{662}$  و  $u_{663}$  و  $u_{664}$  و  $u_{665}$  و  $u_{666}$  و  $u_{667}$  و  $u_{668}$  و  $u_{669}$  و  $u_{670}$  و  $u_{671}$  و  $u_{672}$  و  $u_{673}$  و  $u_{674}$  و  $u_{675}$  و  $u_{676}$  و  $u_{677}$  و  $u_{678}$  و  $u_{679}$  و  $u_{680}$  و  $u_{681}$  و  $u_{682}$  و  $u_{683}$  و  $u_{684}$  و  $u_{685}$  و  $u_{686}$  و  $u_{687}$  و  $u_{688}$  و  $u_{689}$  و  $u_{690}$  و  $u_{691}$  و  $u_{692}$  و  $u_{693}$  و  $u_{694}$  و  $u_{695}$  و  $u_{696}$  و  $u_{697}$  و  $u_{698}$  و  $u_{699}$  و  $u_{700}$  و  $u_{701}$  و  $u_{702}$  و  $u_{703}$  و  $u_{704}$  و  $u_{705}$  و  $u_{706}$  و  $u_{707}$  و  $u_{708}$  و  $u_{709}$  و  $u_{710}$  و  $u_{711}$  و  $u_{712}$  و  $u_{713}$  و  $u_{714}$  و  $u_{715}$  و  $u_{716}$  و  $u_{717}$  و  $u_{718}$  و  $u_{719}$  و  $u_{720}$  و  $u_{721}$  و  $u_{722}$  و  $u_{723}$  و  $u_{724}$  و  $u_{725}$  و  $u_{726}$  و  $u_{727}$  و  $u_{728}$  و  $u_{729}$  و  $u_{730}$  و  $u_{731}$  و  $u_{732}$  و  $u_{733}$  و  $u_{734}$  و  $u_{735}$  و  $u_{736}$  و  $u_{737}$  و  $u_{738}$  و  $u_{739}$  و  $u_{740}$  و  $u_{741}$  و  $u_{742}$  و  $u_{743}$  و  $u_{744}$  و  $u_{745}$  و  $u_{746}$  و  $u_{747}$  و  $u_{748}$  و  $u_{749}$  و  $u_{750}$  و  $u_{751}$  و  $u_{752}$  و  $u_{753}$  و  $u_{754}$  و  $u_{755}$  و  $u_{756}$  و  $u_{757}$  و  $u_{758}$  و  $u_{759}$  و  $u_{760}$  و  $u_{761}$  و  $u_{762}$  و  $u_{763}$  و  $u_{764}$  و  $u_{765}$  و  $u_{766}$  و  $u_{767}$  و  $u_{768}$  و  $u_{769}$  و  $u_{770}$  و  $u_{771}$  و  $u_{772}$  و  $u_{773}$  و  $u_{774}$  و  $u_{775}$  و  $u_{776}$  و  $u_{777}$  و  $u_{778}$  و  $u_{779}$  و  $u_{780}$  و  $u_{781}$  و  $u_{782}$  و  $u_{783}$  و  $u_{784}$  و  $u_{785}$  و  $u_{786}$  و  $u_{787}$  و  $u_{788}$  و  $u_{789}$  و  $u_{790}$  و  $u_{791}$  و  $u_{792}$  و  $u_{793}$  و  $u_{794}$  و  $u_{795}$  و  $u_{796}$  و  $u_{797}$  و  $u_{798}$  و  $u_{799}$  و  $u_{800}$  و  $u_{801}$  و  $u_{802}$  و  $u_{803}$  و  $u_{804}$  و  $u_{805}$  و  $u_{806}$  و  $u_{807}$  و  $u_{808}$  و  $u_{809}$  و  $u_{810}$  و  $u_{811}$  و  $u_{812}$  و  $u_{813}$  و  $u_{814}$  و  $u_{815}$  و  $u_{816}$  و  $u_{817}$  و  $u_{818}$  و  $u_{819}$  و  $u_{820}$  و  $u_{821}$  و  $u_{822}$  و  $u_{823}$  و  $u_{824}$  و  $u_{825}$  و  $u_{826}$  و  $u_{827}$  و  $u_{828}$  و  $u_{829}$  و  $u_{830}$  و  $u_{831}$  و  $u_{832}$  و  $u_{833}$  و  $u_{834}$  و  $u_{835}$  و  $u_{836}$  و  $u_{837}$  و  $u_{838}$  و  $u_{839}$  و  $u_{840}$  و  $u_{841}$  و  $u_{842}$  و  $u_{843}$  و  $u_{844}$  و  $u_{845}$  و  $u_{846}$  و  $u_{847}$  و  $u_{848}$  و  $u_{849}$  و  $u_{850}$  و  $u_{851}$  و  $u_{852}$  و  $u_{853}$  و  $u_{854}$  و  $u_{855}$  و  $u_{856}$  و  $u_{857}$  و  $u_{858}$  و  $u_{859}$  و  $u_{860}$  و  $u_{861}$  و  $u_{862}$  و  $u_{863}$  و  $u_{864}$  و  $u_{865}$  و  $u_{866}$  و  $u_{867}$  و  $u_{868}$  و  $u_{869}$  و  $u_{870}$  و  $u_{871}$  و  $u_{872}$  و  $u_{873}$  و  $u_{874}$  و  $u_{875}$  و  $u_{876}$  و  $u_{877}$  و  $u_{878}$  و  $u_{879}$  و  $u_{880}$  و  $u_{881}$  و  $u_{882}$  و  $u_{883}$  و  $u_{884}$  و  $u_{885}$  و  $u_{886}$  و  $u_{887}$  و  $u_{888}$  و  $u_{889}$  و  $u_{890}$  و  $u_{891}$  و  $u_{892}$  و  $u_{893}$  و  $u_{894}$  و  $u_{895}$  و  $u_{896}$  و  $u_{897}$  و  $u_{898}$  و  $u_{899}$  و  $u_{900}$  و  $u_{901}$  و  $u_{902}$  و  $u_{903}$  و  $u_{904}$  و  $u_{905}$  و  $u_{906}$  و  $u_{907}$  و  $u_{908}$  و  $u_{909}$  و  $u_{910}$  و  $u_{911}$



العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الثاني)
مجموع	مجزأة		
04		التمرين الثالث: (04 نقاط)	
	0,25	(1) المعادلة تعني $(z-i)=0$ أو $(z^2-2z+5=0)$ و... منه $z=i$	
	0,75	$z''=1-2i$ ، $z'=1+2i$ ؛ $\Delta=(4i)^2$	
	0,75	(2) أ) إنشاء النقط $A$ ، $B$ و $C$	
	0,25	ب) $z_H=1+i$	
	0,50	ج) مساحة المثلث $ABC$ هي: $\mathcal{A}=2\text{ cm}^2$	
	0,50	(3) أ) الكتابة المركبة لـ $S$ هي: $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}+i$	
	0,50	ب) مساحة صورة $ABC$ بالتشابه $S$ هي: $\mathcal{A}'=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}\text{ cm}^2$	
	0,50	(4) $ z = iz+1+2i $ أي $ z = z+2-i $ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة $[OD]$ حيث $D(-2;1)$	
02	0,50	التمرين الرابع: (07 نقاط)	
		(1) أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)=-\infty$	
	0,75	ب) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=6x^2-8x+7$ ، من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$ وبالتالي $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ . جدول تغيرات الدالة $g$ .	
	0,50	(2) أ) $g$ مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، $g(0,7)=-0,37$ و $g(0,8)=0,06$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $0,7<\alpha<0,8$ .	
	0,25	ب) إشارة $g(x)$ : $-\infty \quad - \quad \frac{\alpha}{0} \quad + \quad +\infty$	
05	0,50	(II) 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=-\infty$	
	0,50	(2) أ) برهان أن من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$	
	0,50	ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ f(x)-\frac{1}{2}(x+1) \right]=0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ f(x)-\frac{1}{2}(x+1) \right]=0$ . إذن المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ : $y=\frac{1}{2}(x+1)$ .	
	0,50	ج) $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، إشارة $f(x)-\frac{1}{2}(x+1)$ : $-\infty \quad + \quad \frac{1}{3} \quad - \quad +\infty$ . إذا كان $x$ ينتمي إلى $\left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$ فإن $(C_f)$ أسفل $(\Delta)$ و $(C_f)$ يقطع $(\Delta)$ في $A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .	



0,50	(3) أ) من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ .																				
0,25	ب) إشارة $f'(x)$ : $-\infty \quad + \quad 0 \quad - \quad \alpha \quad + \quad +\infty$																				
0,25	جدول تَغْيِرات الدالة $f$ :																				
0,25	<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>0</math></td><td><math>\alpha</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>f'(x)</math></td><td></td><td><math>+</math></td><td><math>0</math></td><td><math>-</math></td><td><math>0</math></td><td><math>+</math></td></tr><tr><td><math>f(x)</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>\nearrow</math></td><td><math>1</math></td><td><math>\searrow</math></td><td><math>f(\alpha)</math></td><td><math>\nearrow</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$	$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$
$x$	$-\infty$	$0$	$\alpha$	$+\infty$																	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$															
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$														
0,25	(4) $f(1) = 0$ .																				
0,50	$f(x) = 0$ تعني $\frac{(x-1)(x^2+x-1)}{2x^2-2x+1} = 0$ أي $(x-1)(x^2+x-1) = 0$ و بالتالي $x-1=0$ أو $x^2+x-1=0$ حلول المعادلة هي: $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ، $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ، $x_0 = 1$																				
0,50	(5) إنشاء المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$																				
0,25	(6) أ) التحقق من: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = f(x) - 2$																				
0,25	ب) $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-2)$																				
0,25	إنشاء $(C_h)$ في المعلم السابق.																				



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 26، المدينة  
الهاتف: 05.50.58.85.27  
البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



أكاديمية رواد التائق لخدمات  
التنمية البشرية والاستشارات

## تمارين الرياضيات

### لـ حساب الدوال الأصلية

#### 1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.  
الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  هي الدوال  $F$ . يمثل  $c$  عددا حقيقيا كفيما.

$f(x) =$	$F(x) =$	$I =$
$a$ ( $a$ عدد حقيقي)	$ax + c$	$\mathbb{R}$
$x$	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$ ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ )	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + c$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$	$(k \in \mathbb{Z}) \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

#### 2. خواص

\* إذا كانت  $F$  و  $G$  دالتين أصليتين على الترتيب لـ  $f$  و  $g$  على مجال  $I$  فإن  $F+G$  دالة أصلية لـ  $f+g$  على  $I$ .  
\* إذا كانت  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على مجال  $I$  فإن  $kF$  دالة أصلية للدالة  $kf$  على  $I$  ( $k \in \mathbb{R}$ ).

#### 3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

$u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

الدالة $f$	الدوال الأصلية للدالة $f$ على $I$	شروط على الدالة $u$
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	
$(n \in \mathbb{N}^*) u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	من أجل كل $x$ من $I$ ، $u(x) \neq 0$
$(n \geq 2, n \in \mathbb{N}) \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	من أجل كل $x$ من $I$ ، $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	من أجل كل $x$ من $I$ ، $u(x) > 0$



العنوان: طريق حاج حمدي، فيلا رقم 27، المدينة

الهاتف: 05.50.58.85.27

البريد الإلكتروني: Road.ataalok@gmail.com



أكاديمية رواد التائق لخدمات  
التنمية البشرية والاستشارات

## نهايات شهيرة

الأستاذ : داهش مكي

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\ln x} = 0$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0; \quad 0^+$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \ln x} = -\infty$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0; \quad 0^-$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0; \quad 0^+$ $n \in \mathbb{N}^*$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n \ln x} = -\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0; \quad 0^-$ $n \in \mathbb{N}^*$



## الدوال الأسية

\* مبرهنة

الدوال غير المدمومة  $f$  و القابلة للاشتقاق على

$R$  بحيث من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

في الدوال  $x \mapsto e^{kx}$  حيث  $k$  عدد حقيقي .

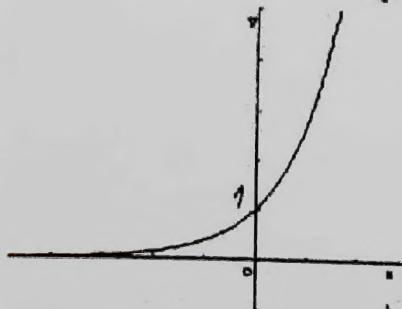
\* قنليات

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$

\* جدول تغيرات "Exp"

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x) = e^x$		+	
$\exp(x) = e^x$	0	1	$+\infty$

\* ملحنى Exp



\* نتيجة :

لدالة  $x \mapsto e^x$  هي لصن تقريب تكفي لدالة  $e^x$   $x \gg 0$

بحول 0 أي من أجل  $x$  قريب من 0 لدينا :  $e^x \approx 1+x$

\* المشتقة :

خاصية : إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$

فإن لدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$

و لدينا :  $(e^u)' = u' \times e^u$

\* مبرهنة و تعريف :

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $R$  بحيث :  $f'(x) = f(x)$  و  $f(0) = 1$

نرمز إلى هذه الدالة بالرمز  $\exp$  ونسميها الدالة الأسية النيبيرية (NEPER)

نتج :

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

الدالة  $\exp$  مستمرة على  $R$  لأنها قابلة للاشتقاق على  $R$

صورة العدد  $e$  بالدالة الأسية هو العدد  $e$  حيث :  $e \approx 2.718281828...$

اصطلاحاً من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) = e^x$

$e^x$  نقراً : أسية  $x$

\* خواص :

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  من أجل كل عدد صحيح نسبي  $n$  لدينا :

$e^x \times e^y = e^{x+y}$	$e^x \neq 0$
$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
$(e^x)^n = e^{nx}$	$e^x > 0$

$e^0 = 1$	$e^1 = e$
$e^x = e^y$ معناه $x = y$	
$e^x > e^y$ معناه $x > y$	
$e^x > 1$ معناه $x > 0$	
$0 < e^x < 1$ معناه $x < 0$	

$$e^{\ln y} = y : y \in ]0, +\infty[$$

$$x = \ln y \text{ معناه } y = e^x : y \in ]0, +\infty[$$

$$\ln(e^x) = x : x \in R$$

\* مبرهنة :

$k$  عدد حقيقي

توجد دالة وحيدة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $R$  بحيث :

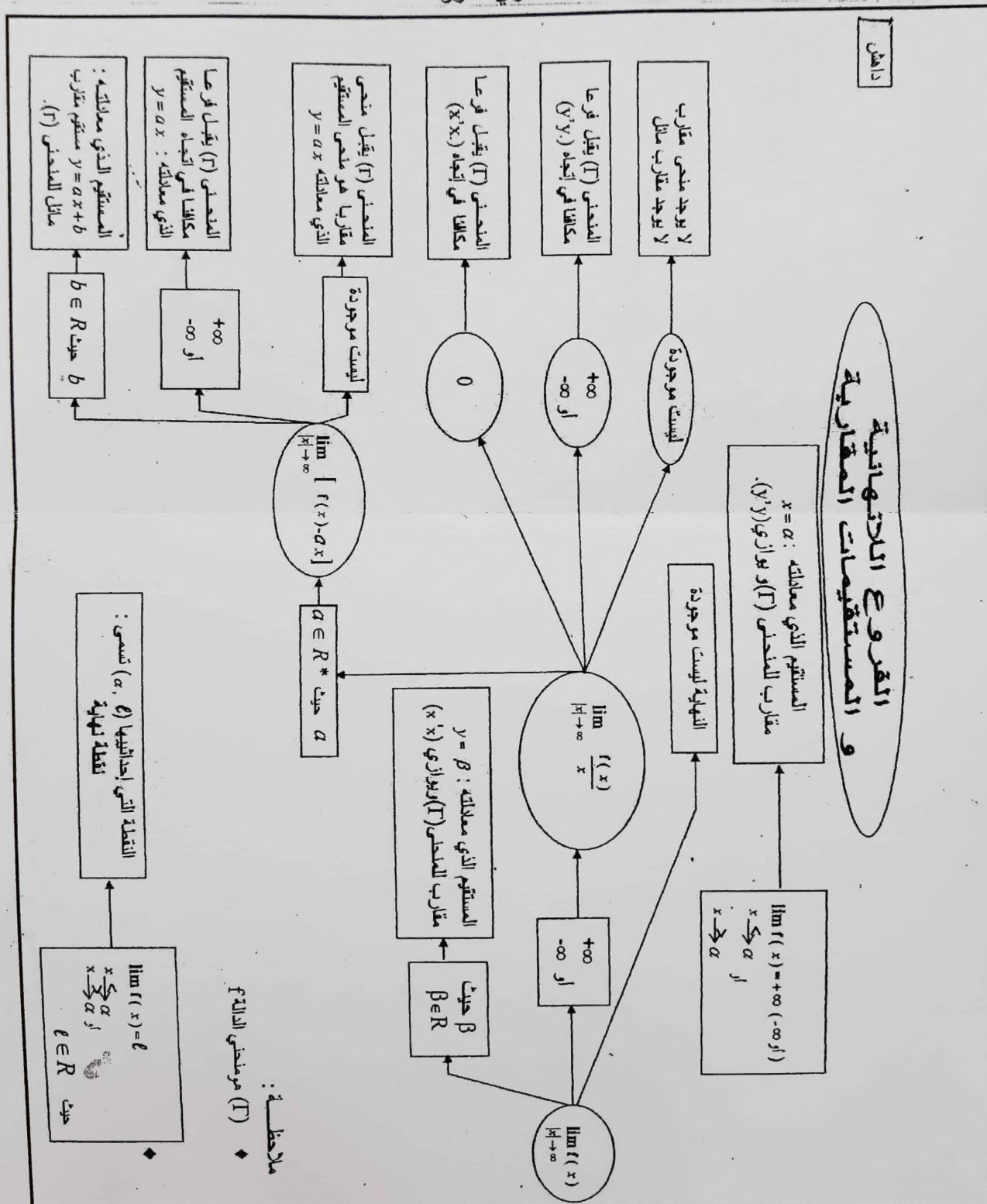
$$f(0) = 1 \text{ و } f' = kf$$

في الدالة  $x \mapsto e^{kx}$



# تمارين الرياضيات

## 3 ثانوي ذكور

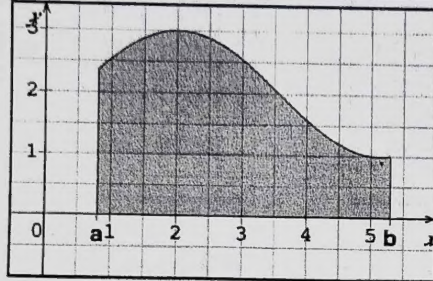




## ١- تكامل دالة

### 1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

**خاصية:**  $f$  دالة مستمرة و موجبة على مجال  $I$  و  $a, b$  عددين حقيقيين من  $I$  حيث  $a \leq b$ ،  $(C_f)$  منحنى  $f$  في معلم متعامد  $(O, A, B)$  و  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $I$ .  
مساحة الحيز تحت المنحنى  $(C_f)$  بين العددين  $a$  و  $b$  هو العدد الحقيقي  $F(b) - F(a)$ .



#### ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحنى  $(C_f)$  بين العددين  $a$  و  $b$  هو الحيز المحدد بالمنحنى  $(C_f)$ ، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = b$  و  $x = a$ .
2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل  $OAKB$  حيث  $K$  هي النقطة التي إحداثياتها  $(1;1)$ .

### 2. تعريف التكامل

**تعريف:**  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  و  $a, b$  عددين حقيقيين من  $I$ .  
يسمى العدد الحقيقي  $F(b) - F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$ ، التكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f$  و نرمز إليه بالرمز  $\int_a^b f(x) dx$ . نقرأ: التكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f(x)$  تفاضل  $x$ .

**خاصية:**  $f$  دالة مستمرة و موجبة على مجال  $I$  و  $a, b$  عددين حقيقيين من  $I$  حيث  $a \leq b$ ،  $(C_f)$  منحنى  $f$  في معلم متعامد و  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $I$ . مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و بالمستقيمتين اللتين معادلتاهما  $x = a$  و  $x = b$ ،  $y = 0$  هو العدد الحقيقي  $\int_a^b f(x) dx$ .

## ١- خواص التكامل

### 1. علاقة شال

**خاصية:**  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$ ، من أجل كل أعداد حقيقية  $a, b, c$  و  $c$  من  $I$  لدينا:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

### 2. الخطية

**خاصية:**  $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على مجال  $I$  و  $k$  عدد حقيقي من أجل كل عددين حقيقيين  $a, b$  من  $I$  لدينا:

$$\int_a^b [kf(x) + g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (1) \quad \text{و} \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

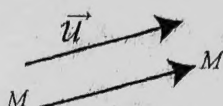
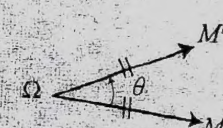

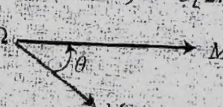
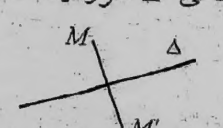
### 3. المقارنة

**خواص:**  $f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على مجال  $[a, b]$ .

$$(1) \quad \text{إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a, b], f(x) \geq 0 \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$(2) \quad \text{إذا كان من أجل كل } x \text{ من } [a, b], f(x) \leq g(x) \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$



التحويلات	التعريف	الخواص المميزة	النقط الصامدة	الكتابة المركبة
انسحاب شعاعه $\vec{u}$ العناصر المميزة الشعاع $\vec{u}$	$T(M)=M'$ يكافئ $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ 	إذا كان $\begin{cases} T(M)=M' \\ T(N)=N' \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$	التحويل لا يقبل نقط صامدة	$\vec{u}(b)$ $Z' = Z + b$
دوران $R$ مركزه $\Omega$ وزاويته $\theta$ العناصر المميزة • المركز $\Omega$ • زاويته $\theta$	إذا كان $M \neq \Omega$ $R(M) = M'$ يكافئ $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \end{cases}$ 	إذا كان $\begin{cases} R(M)=M' \\ R(N)=N' \end{cases}$ فإن $\begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta [2\pi] \end{cases}$	الدوران يقبل نقطة صامدة وحيدة هي المركز $\Omega$	نكتب $\Omega(w)$ $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$
تحاكي مركزه $\Omega$ نسبته $K$ غير معدوم العناصر المميزة • المركز $\Omega$ • النسبة $K$	إذا كان $M \neq \Omega$ $H(M) = M'$ يكافئ $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ 	إذا كان $\begin{cases} H(M)=M' \\ H(N)=N' \end{cases}$ فإن $\overrightarrow{M'N'} = K \overrightarrow{MN}$	التحاكي يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز $\Omega$	نكتب $\Omega(w)$ $z' - w = K(z - w)$
تشابه مركزه $\Omega$ نسبته $K$ وزاويته $\theta$ العناصر المميزة • المركز $\Omega$ • النسبة $(K \neq 0)$ • الزاوية $\theta$	إذا كان $M \neq \Omega$ $S(M) = M'$ يكافئ $\begin{cases} \Omega M' = k \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta [2\pi] \end{cases}$ 	إذا كان $\begin{cases} S(M)=M' \\ S(N)=N' \end{cases}$ فإن $\begin{cases} M'N' = KMN \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta [2\pi] \end{cases}$	التشابه يقبل نقطة صامدة وحيدة وهي المركز $\Omega$	نكتب $\Omega(w)$ $z' - w = K e^{i\theta}(z - w)$
تناظر $S_\Delta$ محوره $(\Delta)$ العناصر المميزة • المستقيم $(\Delta)$	إذا كان $M \in \Delta$ فإن $S_\Delta(M) = M'$ يكافئ $\Delta$ محور $[MM']$ 		التناظر يقبل المستقيم $\Delta$ مجموعة نقط صامدة	$z' = a\bar{z} + b$ $b \in \mathbb{C}$ و $a \in \mathbb{C}^*$

